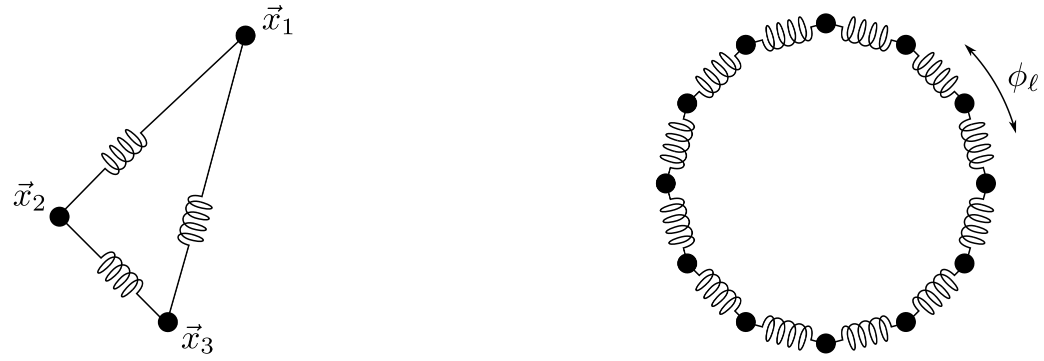

(a) **(b)**

Abbildung 1: Skizzen zu den Aufgaben. (a) Drei mittels Federn verbundene Punktmassen im $\mathbb{R}^n$. (b) Ringförmige Anordnung von n identischen Punktmassen.

7 Anwendungen

7.1 Dreikörperproblem mit Federn

Wir betrachten drei identische Punktmassen, die über masselose Federn ohne Ruhelänge miteinander verbunden sind (siehe Abb. 1a). Die Lagrangefunktion hat die Form

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{x}}_1^2 + \dot{\vec{x}}_2^2 + \dot{\vec{x}}_3^2\right] - \frac{k}{2}\left[(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_3)^2 + (\vec{x}_3 - \vec{x}_1)^2\right].$$

(a) Offenbar ist das Problem invariant unter globalen Translationen, also macht es Sinn diese Invarianz durch geschickte Koordinatenwahl zu nutzen. Wir definieren dazu

$$\vec{x}_i = \vec{X} + \vec{q}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

mit der Zwangsbedingung

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3 = 0.$$

Was ist die physikalische Bedeutung dieser Zwangsbedingung?

(b) Zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion als

$$L = \frac{3m}{2}\dot{\vec{X}}^2 + m\left[\dot{\vec{q}}_1^2 + \dot{\vec{q}}_2^2 + \dot{\vec{q}}_1\dot{\vec{q}}_2\right] - 3k\left[\vec{q}_1^2 + \vec{q}_2^2 + \vec{q}_1\vec{q}_2\right].$$

schreiben lässt.

(c) Wir definieren nun

$$\begin{bmatrix}\vec{q}_1\\ \vec{q}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\eta}_1\\ \vec{\eta}_2\end{bmatrix}.$$

Drücken Sie L in den Koordinaten $\vec{X}, \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$ aus und bestimmen Sie α derart, dass alle Koordinaten entkoppeln.

(d) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her und finden Sie deren allgemeine Lösung.

7.2 Diskrete Feldtheorie

In dieser Aufgabe betrachten wir n Punktmassen auf einem Kreis mit Radius r, die wieder über masselose Federn miteinander verbunden sind (siehe Abb. 1b). In der Gleichgewichtslage haben alle Massen den gleichen Abstand zueinander, also wählen wir als verallgemeinerte Koordinaten die Auslenkungen ϕ_ℓ aus dieser Gleichgewichtslage. Unter der Annahme kleiner Auslenkungen erhalten wir die Lagrangefunktion

$$L(\phi_\ell, \dot{\phi}_\ell) = \frac{mr^2}{2} \sum_{\ell=1}^{n} \dot{\phi}_\ell^2 - \frac{kr^2}{2} \sum_{\ell=1}^{n} (\phi_\ell - \phi_{\ell+1})^2,$$

wobei wir in der zweiten Summe $n+1$ mit 1 identifizieren.

(a) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichungen die Form

$$\ddot{\phi}_\ell = -\omega^2 (2\phi_\ell - \phi_{\ell+1} - \phi_{\ell-1}) \tag{1}$$

annehmen und bestimmen Sie ω.

(b) Um Gleichung (1) zu lösen, machen wir den Exponentialansatz $\phi_\ell(t) = \mathrm{e}^{\pm\lambda t}\phi_\ell(0)$. Wir erhalten das Eigenwertproblem

$$\lambda^2 \phi_\ell(0) = -\omega^2 \big[2\phi_\ell(0) - \phi_{\ell+1}(0) - \phi_{\ell-1}(0)\big], \tag{2}$$

das nun noch zu lösen ist. Machen Sie dazu den Ansatz $\phi_\ell(0) = z^\ell$ und bestimmen Sie $\lambda(z)$.

(c) Da wir $n+1$ und 1 identifiziert haben, gilt

$$z^{n+1} = \phi_{n+1}(0) = \phi_1(0) = z.$$

Welche Werte kann z also annehmen? Für jeden möglichen Wert von z erhalten Sie somit die Eigenschwingung

$$\phi_\ell(t) = \big[\alpha \mathrm{e}^{\lambda(z)t} + \beta \mathrm{e}^{-\lambda(z)t}\big] z^\ell$$

mit beliebigen Konstanten α, β.

(d) Wir betrachten den Anfangswert $\phi_\ell(0) = \epsilon\delta_{\ell,0}$ und $\dot{\phi}_\ell(0) = 0$, also eine kleine statische Auslenkung der Punktmasse 0. Schreiben Sie diesen Anfangswert als Superposition der zuvor erarbeiteten Lösungen und bestimmen Sie damit $\phi_\ell(t)$.