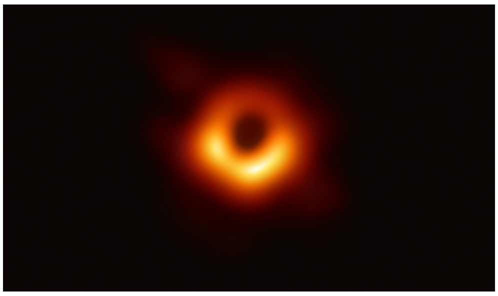

Abbildung 1: Fotografische Aufnahme des Schwarzen Lochs M87* durch das Event Horizon Telescope (EHT). [Quelle: EHT Collaboration, `https://www.eso.org/public/images/eso1907a/`]

6 Rotationssymmetrische Probleme

Dieses Blatt behandelt zwei komplett unabhängige Themen, die beide einen etwas anderen Blickwinkel auf das Noether-Theorem geben sollen. Da die Rechnungen hierbei leider schnell ausarten können, ist es empfehlenswert, sich für die Aufgabe zu entscheiden, die Sie am meisten interessiert. Die jeweils andere Aufgabe ist dann als Bonus zu verstehen.

6.1 Alternative 1: Drehungen in Kugelkoordinaten

Während Kugelkoordinaten sehr gut geeignet sind um rotationssymmetrische Systeme zu *beschreiben*, ist es nicht immer leicht, in ihnen diese Symmetrie auch zu *erkennen*. Daher werden wir in dieser Aufgabe herleiten, wie (infinitessimale) Rotationen in Kugel- bzw. in beliebigen Koordinaten aussehen. Die verwendete Konvention ist hier

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R}_0^+, \quad \theta \in [0,\pi] \quad \text{und} \quad \phi \in [0, 2\pi[. \tag{1}$$

Aus der Vorlesung wissen Sie bereits, dass eine infinitessimale Drehung in kartesischen Koordinaten die Form

$$\begin{bmatrix} \delta_\tau x_1 \\ \delta_\tau x_2 \\ \delta_\tau x_3 \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \tau = -\tau^\mathsf{T} \tag{2}$$

hat. Um diese Relation in Kugelkoordinaten zu übersetzen, nutzen wir

$$\begin{bmatrix} \delta_\tau x_1 \\ \delta_\tau x_2 \\ \delta_\tau x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_\tau r \\ \delta_\tau \theta \\ \delta_\tau \phi \end{bmatrix}$$

wobei die auftretende Matrix die Jacobi-Matrix von Kogelkoordinaten ist. Durch Invertieren dieser Relation und Einsetzen von Gleichungen (1) und (2) erhalten wir damit

$$\begin{bmatrix} \delta_\tau r \\ \delta_\tau \theta \\ \delta_\tau \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{\sin\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \tau \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{3}$$

(a) Werten Sie Gleichung (3) für Drehungen um die kartesischen Koordinatenachsen aus. Die zugehörigen antisymmetrischen Generatoren sind dabei gegeben als

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hinweis: Ein schneller Test Ihres Ergebnisses ist die Bedingung $\delta_\tau r = 0$.

(b) Berechnen Sie

$$\begin{bmatrix} \delta_\tau \dot{r} \\ \delta_\tau \dot{\theta} \\ \delta_\tau \dot{\phi} \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} \delta_\tau r \\ \delta_\tau \theta \\ \delta_\tau \phi \end{bmatrix}$$

aus ihrem Ergebnis aus (a).

(c) Die Lagrangefunktion eines freien Teilchens ist in Kugelkoordinaten durch

$$L = T = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\right]$$

gegeben. Nutzen Sie ihren bisherigen Ergebisse um zu zeigen, dass L invariant unter Drehungen ist.

(d) Berechnen Sie den Drehimpuls (die zur Rotationssymmetrie zugehörige Erhaltungsgröße) für ein freies Teilchen in Kugelkoordinaten.

6.2 Alternative 2: Trajektorien um ein schwarzes Loch

In der allgemeinen Relativitätstheorie bewegen sich freie Teilchen auf Geodäten durch die Raumzeit, d.h. die Wirkung eines freien Teilchens der Masse m is gegeben durch

$$S[\gamma] = -mc^2 \int_\gamma \mathrm{d}s$$

mit dem infinitessimalen Linienelement $\mathrm{d}s$. In der Raumzeit um ein schwarzes Loch der Masse M hat dieses Linienelement die Form

$$c^2\mathrm{d}s^2 = \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]c^2\mathrm{d}t^2 - \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right)$$

mit dem Schwarzschild-Radius $r_s = \frac{2GM}{c^2}$. Es gilt also

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathrm{d}\tau\, L$$

mit der Lagrangefunktion

$$L = -mc\sqrt{\left[1 - \frac{r_s}{r}\right]c^2\dot{t}^2 - \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]^{-1}\dot{r}^2 - r^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)}.$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie[1] genügt es, sich auf die Ebene $\theta = \frac{\pi}{2}$ einzuschränken und wir erhalten

$$L = -mc\sqrt{\left[1 - \frac{r_s}{r}\right]c^2\dot{t}^2 - \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2}. \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie: Aus den zyklischen Koordinaten der Lagrangefunktion (4) ergeben sich die Erhaltungsgrößen

$$-E = \frac{mc^2}{L} \times \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]mc^2\dot{t} \quad \text{und} \quad J = -\frac{mc^2}{L} \times mr^2\dot{\phi}.$$

(b) Aufgrund der Reparametrisierungsinvarianz dürfen wir $L = \text{const.} = -mc^2$ annehmen. Damit ergibt sich

$$c^2 = \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]c^2\dot{t}^2 - \left[1 - \frac{r_s}{r}\right]^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2.$$

vereinfachen. Eliminieren Sie $\dot{t}$ und $\dot{\phi}$ mit Hilfe der Erhaltungsgrößen E und J um eine Differentialgleichung für r zu erhalten.

(c) Zeigen Sie, dass sich diese Differentialgleichung als

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff.}}(r) = \text{const.} \quad \text{mit} \quad V_{\text{eff.}}(r) = \frac{GMm}{r} - \frac{J^2}{2mr^2} + \frac{J^2GM}{mc^2r^3}$$

schreiben lässt. Welche der Terme erkennen Sie wieder?

(d) Kreisförmige Orbits sind durch $\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = 0$ charakterisiert. Bestimmen Sie die Relation zwischen dem Radius r eines solchen Orbits und dem zugehörigen Drehimpuls J. Was passiert für $r \leq \frac{3}{2}r_s$?

[1]Diese lässt sich mit den Methoden aus 6.1 nachweisen.