# 4 Noether-Theorem

## 4.1 Herleitung des Noether-Theorems

In dieser Aufgabe leiten Sie das Noether-Theorem aus dem Wirkungsprinzip her, um ein besseres Gefühl dafür zu bekommen, warum es stimmt. Wir betrachten dazu eine Wirkung der Form

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, L(q, \dot{q}, t),$$

sowie eine infinitessimale Transformation

$$q \to q + \delta_\epsilon q + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right).$$

Insbesondere lassen wir zu, dass $\delta_\epsilon q(t_{0,1}) \neq 0$ ist, die Endpunkte der Trajektorie werden also nicht festgehalten[1].

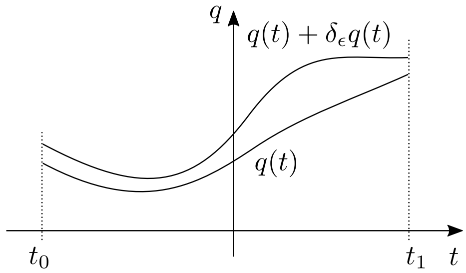


**Abbildung 1:** Zwei Trajektorien $q$ und $q + \delta_\epsilon q$ mit nicht identischen Endpunkten.

(a) Zeigen Sie: Unter der obigen Transformation gilt

$$\delta_\epsilon S[q] = S[q + \delta_\epsilon q] - S[q] = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_\epsilon q \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] \delta_\epsilon q + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right). \tag{1}$$

(b) Inwiefern vereinfacht sich Gleichung (1) wenn $q$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist?

(c) Angenommen, es gibt eine Funktion $\Lambda(q, \dot{q}, t)$ mit $\delta_\epsilon L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda$. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\delta_\epsilon S[q] = \Lambda\Big|_{t_0}^{t_1}. \tag{2}$$

Warum ist dann die Größe $I := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_\epsilon q - \Lambda$ entlang von Lösungen der Bewegungsgleichungen erhalten?

## 4.2 Euklidische Gruppe

Die euklidische Gruppe $E(\mathbb{R}^n)$ besteht aus den abstandserhaltenden Transformationen des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$. Die Elemente $g \in E(\mathbb{R}^n)$ der euklidischen Gruppe sind alle von der Form

$$g = (R, \vec{v}),$$

wobei $R$ eine orthogonale Matrix[2] und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor ist. Jedes solche Gruppenelement *wirkt* auf einem beliebigen $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ indem erst $\vec{x}$ mittels $R$ gedreht und das Ergebnis dann um $\vec{v}$ verschoben wird. Man schreibt dies als

$$(R, \vec{v}) \triangleright \vec{x} := R\vec{x} + \vec{v}. \tag{3}$$

[1] Achtung: Diese Transformation lässt die Zeit unverändert! Für Transformationen, die die Zeit ändern, müssen wir etwas härter arbeiten.

[2] Eine Matrix ist orthogonal, wenn ihre Transponierte gleichzeitig ihre Inverse ist, also wenn $R^\intercal R = 1_{n\times n}$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass Gleichung (3) in der Tat den euklidischen Abstand zwischen zwei Punkten $\vec{x}$ und $\vec{y}$ erhält.

(b) Zeigen Sie, dass

$$(R_1, \vec{v}_1) \triangleright \Big[(R_2, \vec{v}_2) \triangleright \vec{x}\Big] = (R_1 R_2, R_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_1) \triangleright \vec{x}$$

gilt. Dies motivert dazu, die Gruppenoperation als

$$(R_1, \vec{v}_1) \circ (R_2, \vec{v}_2) := (R_1 R_2, R_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_1)$$

zu definieren.

(c) Finden sie das Einselement $e$, sowie das inverse Element $(R, \vec{v})^{-1}$ zu $(R, \vec{v})$.

(d) Für ein beliebiges Gruppenelement $(R, \vec{v})$ definieren wir die *Matrixdarstellung*

$$M_{(R,\vec{v})} := \begin{pmatrix} R & \vec{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Darstellung handelt, also dass

$$M_{g_1} M_{g_2} = M_{g_1 \circ g_2} \quad \text{und} \quad M_e = 1_{(n+1)\times(n+1)}$$

gilt.