4 Spezielle Koordinaten

4.1 Das Äquivalenzprizip

Ein Rad mit Radius r rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω (vgl. Abb. 1). Daran ist mittels einer masselosen Stange der Länge ℓ eine Punktmasse befestigt, die sich ansonsten frei bewegen kann. Zur Beschreibung des Problems nutzen wir *zeitabhängige Koordinaten*

$$\vec{x} = r\begin{pmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{pmatrix} + \ell\begin{pmatrix}\cos(\omega t+\phi)\\ \sin(\omega t+\phi)\end{pmatrix}.$$

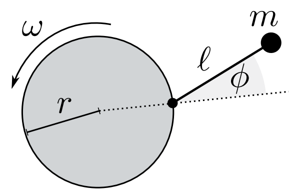

Abbildung 1: Masse m, die frei schwingend am rotierenden Rad befestigt ist.

Die Lagrangefunktion ist die eines freien Teilchens, also $L = m\|\dot{\vec{x}}\|^2/2$. Da alle Zwangsbedingungen bereits durch die Koordinatenwahl implementiert werden, sind keine Lagrangemultiplikatoren nötig.

(a) Zeigen Sie: Die Lagrangefunktion hat die Form

$$L(\phi,\dot\phi) = m\ell^2\left[\frac{(\omega+\dot\phi)^2}{2} + \frac{r\omega(\omega+\dot\phi)\cos\phi}{\ell}\right] + \text{const.}$$

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für ϕ her. Wie interpretieren Sie das Ergebnis?

4.2 Frei hängendes Pendel

Wir betrachten ein frei hängendes Pendel im $\mathbb{R}^3$ (unter Einfluss der Schwerkraft). Masse und Länge des Pendels bezeichnen wir mit m und ℓ, eine mögliche Lagrangefunktion ist

$$L = \frac{m\ell^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\right) + mg\ell\cos\theta.$$

(a) Welche Koordinaten wurden hier verwendet? Fertigen Sie eine Skizze an und zeichnen Sie die Winkel θ und ϕ ein.

(b) Welche Erhaltungsgröße gehört zur zyklischen Koordinate ϕ?

(c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für θ her und eliminieren Sie die Abhängigkeit von $\dot\phi$ mittels der Erhaltungsgröße aus (b).

(d) Wie sehen die Lösungen mit $\dot\theta = 0$ im $\mathbb{R}^3$ aus?