3 Euler-Lagrange und Lagrangemultiplikatoren

3.1 Starrer Körper

Wir betrachten zwei freie Punktteilchen mit den Massen m und M, die durch einen masselosen Stab der Länge d miteinander verbunden sind. Bezeichnen wir die Positionen der Massen mit $\vec{x}$ und $\vec{X}$, so ist die Lagrangefunktion gegeben als

$$\begin{aligned} L &= L_{\text{frei, } m} + L_{\text{frei, } M} + \lambda L_{\text{Zwangsbedingung}} \\ &= \frac{m}{2}\|\dot{\vec{x}}\|^2 + \frac{M}{2}\|\dot{\vec{X}}\|^2 + \frac{\lambda}{2}(\|\vec{x} - \vec{X}\|^2 - d^2). \end{aligned}$$

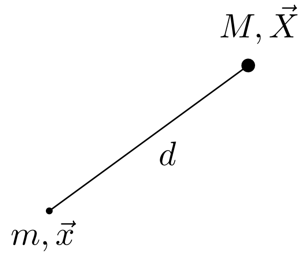

Abbildung 1: Zwei Punktmassen m, M and den Orten $\vec{x}$, $\vec{X}$ mit Abstand d.

Der feste Abstand d wurde als Zwangsbedingung mittels eines Lagrange-Multiplikators λ implementiert. Hier und im Folgenden ist $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ immer die euklidische Länge des Vektors $\vec{v}$.

(a) In welchem Sinne ist die obige Lagrangefunktion translationsinvariant?

(b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen für $\vec{x}$ und $\vec{X}$ her.

(c) Zeigen Sie, dass der Gesamtimpuls $m\dot{\vec{x}} + M\dot{\vec{X}}$ erhalten ist.

3.2 Geodäten auf der Kugeloberfläche

Wir suchen die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten auf einer Kugel mit Radius r. Dazu könnten wir prinzipiell mit dem Linienelement in Kugelkooridnaten starten und das zugehörige Längenfunktional minimieren – die dabei entstehenden Gleichungen würden allerdings wenig Hoffnung auf Lösbarkeit zulassen.

Stattdessen schlagen wir folgenden Weg ein: Erst definieren wir das Längenfunktional

$$S[\gamma] := \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathrm{d}\tau\, L(\dot{\vec{x}}) \quad \text{mit} \quad L(\dot{\vec{x}}) = \|\dot{\vec{x}}\| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2},$$

welches dem euklidischen Linienelement $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2$ entspricht. Hierbei ist $\gamma : \tau \to (x_1, x_2, x_3)$ ein beliebiger Pfad im $\mathbb{R}^3$ und wir verwenden die Kurzschreibweise $\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}$.

(a) Zeigen Sie, dass $L[\gamma]$ invariant ist unter Reparametrisierung von γ. Definieren Sie dazu $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(\sigma(\tau))$ für streng monoton wachsendes $\sigma : [\tau_0, \tau_1] \to [\tau_0, \tau_1]$ und zeigen Sie, dass $L[\gamma] = L[\tilde{\gamma}]$.

Das Funktional S minimieren wir nun unter der Zwangsbedingung

$$0 = C(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2,$$

wir suchen also nach Lösungen von

$$\delta\tilde{S}[\gamma,\lambda] = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{S}[\gamma,\lambda] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathrm{d}\tau \left[L(\dot{x},\dot{y},\dot{z}) + \frac{\lambda}{2} C(x,y,z) \right].$$

(b) Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen durch

$$0 = C(\vec{x}) \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\dot{\vec{x}}}{\|\dot{\vec{x}}\|} = \lambda \vec{x}$$

gegeben sind.

(c) Aufgrund der Parametrisierungsinvarianz können Sie annehmen, dass $\|\dot{\vec{x}}\|$ konstant ist – warum?

(d) Finden Sie die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen unter der obigen Annahme. Welche Rolle spielt λ?

3.3 Bonus: Freies relativistisches Teilchen

Geodäten spielen in der relativistischen Physik eine tragende Rolle, da die Wirkung eines freien Teilchens in der speziellen Relativitätstheorie durch

$$S[\gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \mathrm{d}\tau \, L(\dot{t},\dot{\vec{x}}) \quad \text{mit} \quad L(\dot{t},\dot{\vec{x}}) = -m\sqrt{c^2\dot{t}^2 - \|\dot{\vec{x}}\|^2}$$

gegeben ist. Dabei ist γ ein beliebiger Pfad in der Raum*zeit* und $S[\gamma]$ ist proportional zu dessen Länge bezüglich des Linienelements

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - [\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2]$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c. Da auch diese Wirkung (wie in der vorherigen Aufgabe) invariant unter Reparametrisierung ist, ist der Parameter τ unphysikalisch – man spricht von einer *Eichsymmetrie*.

(a) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her und zeigen Sie, dass sich auch freie relativistische Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$ bewegen.

(b) In der Parametrisierung $\tau = t$ hat die Lagrangefunktion die Form

$$L(\dot{\vec{x}}) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right\|^2}.$$

Entwickeln Sie die Wurzel für kleine $1/c$ bis zur Ordnung $1/c^4$. Was fällt ihnen auf?