2 Variationsrechnung

2.1 Funtionalableitungen

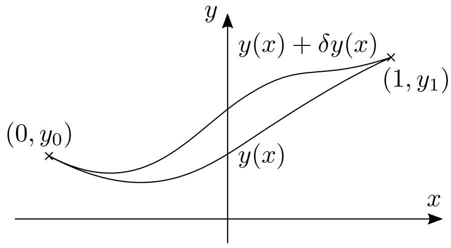

Abbildung 1: Die Graphen zweier Funktionen y und $y + \delta y$. Der Unterschied δy wird als infinitessimal angesetzt.

Eines der wichtigsten mathematischen Konzepte in der modernen Physik ist die Variationsrechnung. Diese beschäftigt sich mit Ableitungen von sogenannten *Funktionalen* – ein Funktional bildet Funktionen auf Zahlen ab. Als Beispiel betrachten wir das Funktional

$$L : \left([0,1] \xrightarrow{y} \mathbb{R}\right) \mapsto L[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \sqrt{1 + y'(x)^2},$$

das jede Funktion $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ auf die Länge ihres Graphen abbildet – die spezielle Form von $L[y]$ folgt aus $\mathrm{d}x\,\sqrt{1+y'(x)^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$. Für den Rest dieses Blattes beschränken wir uns auf glatte (d.h. beliebig of differenzierbare) Funktionen mit fest vorgegebenen Werten $y(0) = y_0$ und $y(1) = y_1$ am Rand ihres Definitionsbereichs.

Die Ableitung eines solchen Funktionals lässt sich als *Linearisierung* beschreiben: Wir betrachten zwei verschiedene Funktionen y und $y + \delta y$, die beide unseren obigen Einschränkungen genügen (siehe Abb. 1).

(a) Was gilt für $\delta y(0)$ und $\delta y(1)$?

Für kleines $\delta y'$ erhalten wir dann die Entwicklung

$$L[y + \delta y] = \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\sqrt{1 + y'(x)^2} + \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \delta y'(x) + \mathcal{O}\left(\delta y'(x)^2\right) \right].$$

Hierbei wurde für den Integranden $\sqrt{1 + y'(x)^2}$ in jedem Punkt x eine Taylorentwicklung in der Variablen $y'(x)$ durchgeführt. Für infinitessimales $\delta y'$ sind die quadratischen Terme vernachlässigbar und wir erhalten die *Funktionalableitung* bzw. *Variation*

$$\delta L[y] := L[y + \delta y] - L[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{y'(x)\delta y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$$

(b) Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass

$$\delta L[y] = -\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}} \delta y(x).$$

gilt. Warum verschwinden die Randterme?

2.2 Geodäten

Häufig sucht man nach Funktionen, für die ein spezielles Funktional extremal wird. In unserem Fall beschreibt der Graph des Minimums von L die kürzeste Verbindungslinie zwischen den Punkten $(0, y_0)$ und $(1, y_1)$.

(a) Erklären Sie, warum $L[y]$ nur extremal sein kann, wenn $\delta L[y] = 0$ für jedes δy ist.

(b) Was ist also eine *Geodäte* (d.h. kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten) im euklidischen Raum?

2.3 Bonus: Geodäten im gekrümmten Raum

In den obigen Aufgaben haben Sie die Geodäten im flachen Raum mit Linienelement $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ bestimmt. Wir verlassen jetzt diese flache Geometrie und betrachten das Linienelement

$$\mathrm{d}s_\omega^2 = \mathrm{e}^{-2\omega(y)}[\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2]$$

mit einer (nicht konstanten) Funktion ω. Das "Länge-des-Graphen"-Funktional hat dann die Form

$$L_\omega[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\omega(y)} \sqrt{1 + y'(x)^2}.$$

Welche Differentialgleichung muss eine Geodäte in dieser Geometrie lösen? Finden Sie die Geodäten für $\omega(y) = ay + b$.