Organisatorisches

Leider ist diese Woche der Seminarraum SE4 (14-16 Uhr, Tobias Kehrer) durch eine Veranstaltung belegt. Laut Belegungsplan ist SE10 in dieser Zeit frei und kann demensprechend genutzt werden.

13 Erzeugende Funktionen

Wir betrachten die Transformation

$$(q,p) \to (Q,P) := (\alpha p q^{\gamma}, \beta q^{\delta}) \tag{1}$$

mit reellwertigen Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu überprüfen, wann diese Transformation kanonisch ist. In der Vorlesung wurde hierfür das Konzept der erzeugenden Funktion vorgestellt. Dieses besagt, dass Gleichung (1) genau dann kanonisch ist, wenn es eine Funktion $S_1(q,Q)$ mit

$$p(q,Q) = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q,Q) \quad \text{und} \quad P(q,Q) = -\frac{\partial S_1}{\partial Q}(q,Q) \tag{2}$$

gibt.

(a) Leiten Sie ein allgemein notwendiges Kriterium für die Existenz einer erzeugenden Funktion wie in Gleichung (2) her.

(b) Wenden Sie das hergeleitete Kriterium auf Gleichung (1) an und zeigen Sie, dass die Relationen

$$\alpha\beta\delta = -1 \quad \text{und} \quad \gamma + \delta = 1 \tag{3}$$

erfüllt sein müssen.

(c) Finden Sie für erfüllte Bedingungen (3) ein $S_1(q,Q)$. Dies zeigt, dass die Bedingungen nicht nur notwendig sondern auch hinreichend sind.

(d) Wir betrachten jetzt die Hamiltonfunktion

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\left(p^2 q^4 + \frac{1}{q^2}\right).$$

Nutzen Sie die hergeleitete kanonische Transformation, um die Bewegungsgleichungen von H zu lösen.

(e) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$(q,p) \to (Q,P) := (\arctan q, p + q^2 + pq^2)$$

kanonisch ist, indem Sie explizit eine erzeugende Funktion der Art $S_3(p,Q)$ herleiten.