12 Hamiltonformalismus

12.1 Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

Das zentrale Element des Hamiltonformalismus, die Hamiltonfunktion, ist als die Legendretransformierte

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

der Lagrangefunktion definiert. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, lassen sich damit aus den Euler-Lagrange-Gleichungen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1}$$

herleiten. Ziel dieser Aufgabe ist es, die Herkunft dieser Gleichungen und zusätzlich noch das Zusammenspiel mit Zwangsbedingungen besser zu verstehen.

(a) Berechnen Sie die Variation

$$\delta S = \delta \int \mathrm{d}t \, L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \delta \int \mathrm{d}t \, \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)\right]$$

und leiten Sie aus dem Prinzip extremaler Wirkung $\delta S = 0$ direkt Gleichung (1) her – woher kommt das Minuszeichen?

(b) Wenn zusätzlich noch holonome Zwangsbedingungen der Form $C_i(\vec{q}) = 0$ gefordert werden, ergeben sich andere Bewegungsgleichungen. Leiten Sie diese mittels der Methode der Lagrange-Multiplikatoren her.

(c) Wie kann man bei anholonomen Zwangsbedingungen der Form $\tilde{C}_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = 0$ vorgehen?

12.2 Hamiltonfunktionen für bekannte Systeme

Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion für...

1. ...ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} \|\dot{\vec{x}}\|^2 - q\left[\phi - \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\vec{A}}{c}\right].$$

2. ...ein relativistisches Teilchen mit der Lagrangefunktion

$$L = -mc\sqrt{c^2 \dot{t}^2 - \|\dot{\vec{x}}\|^2}.$$

Hierbei ist t als Koordinate anzusehen und die Ableitungen sind bezüglich eines Parameters τ zu verstehen. Was fällt Ihnen auf? Zeigen Sie, dass

$$p_t^2 - c^2 \|\vec{p}\|^2 = (mc^2)^2.$$

Warum liefert diese Gleichung eine Erklärung für Ihre Beobachtung?