11 Starrer Körper

11.1 Rollender Bolzen in einer dünnwandigen Walze

Eine dünnwandige Walze (Radius R, Masse M) rollt auf ebenem Untergrund. In ihr liegt ein massiver zylindrischer Bolzen (Radius r, Masse m). Sowohl die Walze als auch der Bolzen rollen ohne Reibung und ohne Schlupf, nur unter Einfluss des konstanten Schwerfeldes g.

Die Lagrangefunktion ist demnach

$$L = T_{\text{W., Rot.}} + T_{\text{W., Bew.}} + T_{\text{B., Rot.}} + T_{\text{B., Bew.}} - V,$$

wobei $T_{\text{Rot.}}$ die Rotationsenergie um die jweilige Symmetrieachse und $T_{\text{Bew.}}$ die kinetische Energie der jeweiligen Schwerpunktsbewegung sind.

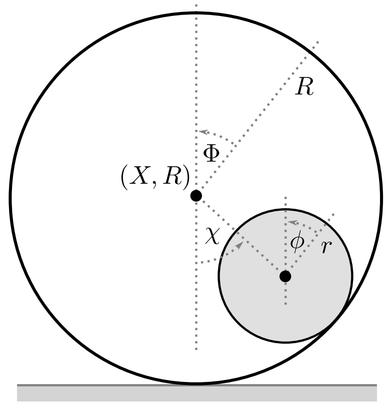

Abbildung 1: Skizze zur Veranschaulichung der Koordinaten X, χ.

Als Koordinaten wählen wir die Position X des Schwerpunkts der Walze, sowie den Auslenkungswinkel χ des Bolzens aus der Mittellage (vgl. Abb. 1). Da kein Schlupf herrscht, stehen die jeweiligen Drehwinkel Φ, ϕ in direkter Relation zu diesen Koordinaten.

(a) Zeigen Sie, dass die zugehörigen Trägheitsmomente durch

$$I = MR^2 \quad \text{und} \quad i = \frac{1}{2}mr^2$$

gegeben sind.

(b) Finden Sie den Zusammenhang zwischen den Koordinaten X, χ und den Drehwinkeln Φ, ϕ. Bestimmen Sie daraus die Winkelgeschwindigkeiten $\Omega = \dot{\Phi}$ und $\omega = \dot{\phi}$. Für die weitere Rechnung können Sie das Zwischenergebnis

$$\Omega = \frac{\dot{X}}{R} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{\dot{X} + R\dot{\chi}}{r}$$

nutzen.

(c) Geben Sie die Lagrangefunktion in den Koordinaten X, χ an.

(d) Bestimmen Sie die zur zyklischen Koordinate X zugehörige Erhaltungsgröße P.

(e) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für χ her.

(f) Finden Sie alle Gleichgewichtslagen mit $\dot{\chi} = 0$ und überprüfen Sie deren Stabilität.

(g) Was ändert sich, wenn sich die Walze auf einer schiefen Ebene befindet?