

10 Nicht inertielle Bezugssysteme

10.1 Die Erde als beschleunigtes Bezugssystem

Wir betrachten ein Bezugssystem auf der Erdoberfläche mit geographischer Breite ϕ , in dem wir kartesische Koordinaten \vec{x} verwenden (siehe Abb. 1). Im inertialen Bezugssystem, in dem die Erde mit Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, ist die Position \vec{x}_I durch

$$\vec{x}_I = R_z(\omega t)R_x(\pi/2 - \phi)[\vec{x} + r\hat{e}_z] \quad (1)$$

gegeben, wobei r den Radius der Erde bezeichnet. Wir benutzen hierbei die Drehmatrizen $R_i(\alpha) = e^{\alpha\tau_i}$ mit

$$\tau_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tau_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

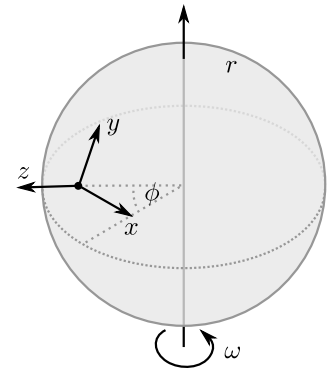


Abbildung 1: Skizze des verwendeten Koordinatensystems.

- (a) Bringen Sie Gleichung (1) auf die in der Vorlesung diskutierte Form

$$\vec{x}_I = R(t)\vec{x} + a(t).$$

- (b) Ausgehend von den Definitionen

$$\omega_I := \dot{R}R^\top, \quad (\omega_I)_i := -\frac{1}{2} \sum_{jk} \epsilon_{ijk} (\omega_I)_{jk} \quad \text{und} \quad \vec{\omega} := R^\top \vec{\omega},$$

zeigen Sie, dass

$$\omega_I = \omega\tau_z, \quad \vec{\omega}_I = \omega\hat{e}_z \quad \text{und} \quad \vec{\omega} = \omega[\cos(\phi)\hat{e}_y + \sin(\phi)\hat{e}_z].$$

- (c) Zeigen Sie dass

$$R^\top \dot{a} = r\vec{\omega} \times \hat{e}_z = r\omega \cos(\phi)\hat{e}_x.$$

- (d) Geben Sie die kinetische Energie T eines Teilchens der Masse m an. Nutzen Sie die Formel aus dem Skript (Kapitel 4.7.4), um T auf die Form

$$T = \frac{m}{2} \|\dot{\vec{x}}\|^2 + m\vec{\omega} \cdot (\vec{x} \times \dot{\vec{x}}) + \frac{m}{2} \|\vec{\omega} \times \vec{x}\|^2 + mr\omega \cos(\phi)\hat{e}_x \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x} + \dot{\vec{x}}) + \text{const.} \quad (2)$$

zu bringen.

10.2 Bonus: Foucault Oszillator

Als Anwendung der Formel (2) untersuchen wir einen harmonischen Oszillator auf der Erdoberfläche (unter Vernachlässigung des Schwerefeldes). Das Potential ist dabei durch

$$V = \frac{m\Omega^2}{2} \|\vec{x}\|^2$$

gegeben.

1. Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.
2. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen zu erster Ordnung in ω durch

$$0 = \ddot{\vec{x}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} + \Omega^2 \vec{x}$$

gegeben sind.

3. Lösen Sie die obigen Gleichungen am Nordpol ($\phi = \pi/2$) und am Äquator ($\phi = 0$) in der Näherung $\omega \ll \Omega$.