1 Nichtkartesische Koordinaten

1.1 Integration in verschiedenen Koordinatensystemen

Mittels Integration soll die Fläche eines Kreises mit Radius R bestimmt werden. Dazu genügt es, die Fläche im ersten Quadranten zu berechnen und mit vier zu multiplizieren. Die Funktion, die den Kreisbogen beschreibt, ist durch $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ gegeben. Für die eingeschlossene Fläche ergibt sich damit

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^R \mathrm{d}x \, \sqrt{R^2 - x^2} \\ &= 4R^2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha \, \cos\alpha \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \\ &= 4R^2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha \, \cos^2\alpha \\ &= 2R^2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\alpha \, [1 + \cos 2\alpha] \\ &= \pi R^2. \end{aligned}$$

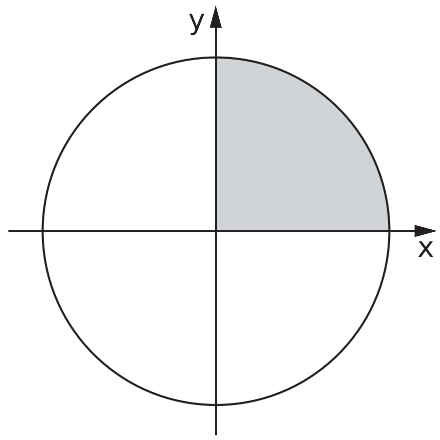

Abbildung 1: Kreis mit Radius R, dessen Fläche bestimmt werden soll. Die grau hinterlegte Fläche kann in kartesischen Koordinaten (recht aufwändig) berechnet werden.

Das Integral wurde mittels der Substitution $x = R\sin\alpha$, also $\mathrm{d}x = \mathrm{d}\alpha \, R\cos\alpha$, und trigonometrischer Identitäten gelöst. Durch eine bessere Wahl der Koordinaten kann die Berechnung allerdings enorm erleichtert werden.

(a) Welche Größen eignen sich als Koordinaten bei einer kreisförmigen Geometrie? Zeichnen Sie sie in Abb. 1 ein und setzten sie in Zusammenhang zu kartesischen Koordinaten.

(b) Ergänzen Sie das infinitesimale Flächenelement für die neuen Koordinaten in Abb. 1 und berechnen Sie erneut durch Integration die Kreisfläche – diesmal in den neuen Koordinaten.

(c) Durch Hinzufügen einer z-Achse wird aus dem Kreis ein Zylinder und aus den soeben verwendeten Polarkoordinaten die Zylinderkoordinaten. Wie erhalten Sie das zugehörige Volumenelement?

1.2 Einheitsvektoren

(a) Zeichnen Sie die kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ und $\hat{e}_z$ Abb. 2 ein. Welche Eigenschaften haben Einheitsvektoren allgemein? In welche Richtung zeigen Sie?

(b) In beliebigen Koordinaten liefert die Formel

$$\hat{e}_\zeta = \frac{1}{\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\zeta}\|}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\zeta}$$

den Einheitsvektor für die Koordinate ζ. Erklären Sie, warum diese Formel stimmt. Berechnen Sie damit die Einheitsvektoren für die Zylinderkoordinaten r, ϕ und z.

(c) Zeichnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\phi$ und $\hat{e}_z$ für die Punkte P und Q in das Koordinatensystem ein. Was fällt Ihnen im Vergleich zu kartesischen Koordinaten auf?

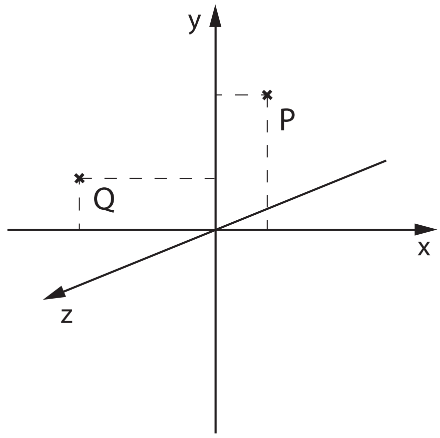

Abbildung 2: Kartesisches Koordinatensystem mit zwei Punkten P und Q.

1.3 Kinematik in Zylinderkoordinaten

Betrachten Sie nun eine Punktmasse, die sich mit konstantem Tempo v auf einer Kreisbahn mit Radius R (gegen den Uhrzeigersinn) bewegt.

(a) Ist die Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{e}_\phi$ konstant? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie $\vec{v}$ und $\vec{a}$ in Zylinderkoordinaten für allgemeines $\vec{r}(t)$. Stellen Sie dann die Bewegungsgleichung für einen Massepunkt in Zylinderkoordinaten auf, der sich kräftefrei bewegt.

(c) In kartesischen Koordinaten lautet die Lösung der Bewegungsgleichung $\vec{x}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{x}_0$ mit beliebigen Parametern $\vec{v}_0$ und $\vec{x}_0$. Wie sieht die Lösung in Zylinderkoordinaten aus?