Hamiltonformalismus

Betrachten Sie einen Massenpunkt mit Masse m und elektrischer Ladung e in drei Dimensionen unter dem Einfluß eines Vektorpotentials $\vec{A}$ und eines elektrischen Potentials ϕ. Eine geeignete Lagrangefunktion ist

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + \frac{e}{c}\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) - e\phi(\vec{x})\,. \tag{1}$$

Im folgenden sei für die Felder der Spezialfall

$$\vec{A}(\vec{x}) = \alpha\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \tag{2a}$$

$$\phi(\vec{x}) = \beta\vec{x}^2 \tag{2b}$$

gewählt.

a) Drücken Sie L in Kugelkoordinaten aus. *Hinweis:* die Rechnung ist besonders einfach, wenn Sie eine Funktion f finden, mit der Sie den Beitrag des Vektorpotentials als

$$\frac{e}{c}\dot{\vec{x}} \cdot \alpha\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = f(r, \dot{r})\,, \tag{3}$$

mit $r = |\vec{x}|$, schreiben können.

b) Bestimmen Sie mit einer Legendre-Transformation die zu dieser Lagrangefunktion gehörende Hamiltonfunktion in Kugelkoordinaten.

c) Leiten Sie die kanonischen Gleichungen ab.

d) Zeigen Sie mit den kanonischen Gleichungen, daß die Beschleunigungen $\ddot{r}$, $\ddot{\phi}$ und $\ddot{\theta}$ nicht von α abhängen. Begründen Sie, warum ein Vektorpotential der Form (2a) keinen Einfluß auf die Bewegung hat.

e) Geben Sie die Erhaltungsgrößen an.

Bewegung im Phasenraum

Betrachten Sie ein Hamilton'sches System mit einem Freiheitsgrad. Der Phasenraum ist $T^*Q = \mathbf{R}^2$ und die Hamiltonfunktion $H : T^*Q \to \mathbf{R}$ sei

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} - q^2 + \frac{q^4}{2} \tag{11}$$

Bei den Skizzen kommt es nicht darauf an, daß alles präzise maßstabsgerecht ist. Vielmehr sollen die qualitativen Eigenschaften (Nullstellen, Asymptoten, relative Länge von Vektoren, etc.) klar erkennbar sein.

a) Skizzieren Sie die potentielle Energie $V : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$V(q) = -q^2 + \frac{1}{2}q^4 \tag{12}$$

und finden Sie die stabilen und instabilen Gleichgewichtslagen.

b) Skizzieren Sie Linien konstanter Energie $H(q,p) = E$ in T^*Q für charakteristische E.

c) Skizzieren Sie typische Trajektorien in T^*Q.

d) Berechnen und skizzieren Sie das Hamilton'sche Vektorfeld

$$\begin{aligned} X_H : T^*Q &\to \mathbf{R}^2 \\ (q,p) &\mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) . \end{aligned} \tag{13}$$

e) In welchen Bereichen des Phasenraums gibt es, wenn überhaupt, geschlossene Bahnen, offene Bahnen und Gleichgewichtslagen (d. h. Fixpunkte der Bewegung)?