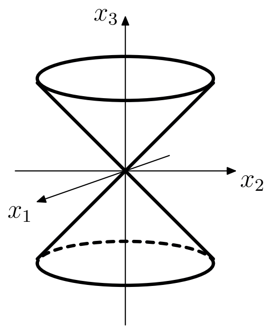

Kreisel

Betrachten Sie einen homogenen symmetrischen Doppelkegel der Masse M mit der *Gesamt*höhe h und Radius R.
Legen Sie das Koordinatensystem mit der x_3-Achse entlang der Symmetrieachse und seinen Ursprung in den Schwerpunkt des Doppelkegels.

a) Bestimmen Sie die Elemente $\{\theta_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$ des Trägheitstensors θ

$$\theta_{ij} = \int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x}) \left(\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right) \tag{1}$$

für den Doppelkegel bzgl. seines Schwerpunkts.

b) Schreiben Sie die Euler'schen Gleichungen

$$\theta\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \theta\vec{\omega} = 0 \tag{2}$$

für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Doppelkegels bzgl. seines Schwerpunkts im körperfesten System in Komponenten.

c) Lösen Sie (2) mit den Anfangsbedingungen

$$\vec{\omega}(0) = (\omega_0, 0, \Omega)\ . \tag{3}$$

Erklären Sie den qualitativen Unterschied der Fälle $\Omega = 0$ und $\Omega \neq 0$.

Hamiltonformalismus

In der Vorlesung wurde die Langrangefunktion für einen kugelsymmetrischen Körper der Masse m mit Trägheitsmoment I, der im Abstand l von seinem Schwerpunkt im Schwerefeld aufgehängt ist als Funktion der Eulerwinkel (ϕ, θ, ψ) der Ausdruck

$$L = \frac{I}{2}\left(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\cos\theta\,\dot{\phi}\dot{\psi}\right) - mgl\cos\theta \tag{4}$$

hergeleitet.
NB: in den folgenden Rechnungen dürfen Sie sich auf $0 < \theta < \pi$ beschränken.

a) Bestimmen Sie die zu ϕ, θ und ψ konjugierten Impulse.

b) Leiten Sie die zugehörige Hamiltonfunktion durch eine Legendretransformation her.

c) Geben Sie die resultierenden kanonischen Gleichungen an.

d) Geben Sie die Erhaltungsgrößen an. Ist das System integrabel?