Legendretransformation

Betrachten Sie die Familie von Funktionen

$$\begin{aligned} f_a : V = \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \mathrm{e}^{ax} \end{aligned}$$

mit $a \in \mathbf{R}$.

a) Bestimmen Sie die Legendretransformierte $f_a^* : V^* = \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ der Funktion f_a.

b) Gibt es $a \in \mathbf{R}$, für die keine Legendretransformierte f_a^* existiert?

c) Legendretransformieren Sie f_a^* erneut und verifizieren Sie für dieses Beispiel erneut, daß $(f_a^*)^* = f_a$, sofern f_a^* existiert.

Bewegung im Phasenraum

Betrachten Sie ein Hamilton'sches System mit einem Freiheitsgrad. Der Phasenraum ist $T^*Q = \mathbf{R}^2$ und die Hamiltonfunktion $H : T^*Q \to \mathbf{R}$ sei

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} - \alpha \cos(\beta q)\,.$$

Wählen Sie für die folgenden Skizzen $m = \alpha = 1$ und $\beta = \pi$, sodaß die interessanten Aspekte im Bereich $(q,p) \in [-2,2] \times [-2,2] \subset T^*Q$ zu sehen sind.
Bei den Skizzen kommt es nicht darauf an, daß alles präzise maßstabsgerecht ist. Vielmehr sollen die qualitativen Eigenschaften (Nullstellen, Asymptoten, relative Länge von Vektoren, etc.) klar erkennbar sein.

a) Skizzieren Sie Linien konstanter Energie $H(q,p) = E$ in T^*Q für charakteristische E.

b) Skizzieren Sie typische Trajektorien in T^*Q.

c) Berechnen und skizzieren Sie das Hamilton'sche Vektorfeld

$$\begin{aligned} X_H : T^*Q* &\to \mathbf{R}^2 \\ (q,p) &\mapsto \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)\,. \end{aligned}$$

d) In welchen Bereichen des Phasenraums gibt es, wenn überhaupt, geschlossene Bahnen, offene Bahnen und Gleichgewichtslagen (d. h. Fixpunkte der Bewegung)?