Tutorium zur Theoretischen Mechanik

Effektives Potential

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einem Potential der Form

$$V(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r^2}\,,$$

mit $r = |\vec{r}|$. Was können sie über die Symmetrie des Problems aussagen?

Was folgt daraus für die zugehörige Kraft? Berechnen Sie sie.

Was folgt für den Drehimpuls?

Wie viele Koordinaten benötigt man um das Problem zu beschreiben? Warum?

Stellen Sie den Betrag des Drehimpulses in geeigneten Koordinaten dar.

Stellen Sie die Gesamtenergie in Polarkoordinaten auf und setzen Sie den Drehimpuls in die Gleichung ein. Identifizieren Sie die verschiedenen Energien, radiale kinetische Energie, azimutale kinetische Energie, potentielle Energie und das effektive Potential? Wie viele Koordinaten benötigen Sie zur Beschreibung des Problems für einen festen Drehimpuls?

Skizzieren Sie das effektive Potential für $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$. Für welchen Fall ergibt sich ein maximaler/minimaler Radius. Zeichnen Sie diese in die Skizze für bestimmte Werte von E ein. Versuchen Sie anhand des Potentials Aussagen über die Bewegung zu machen (ohne Rechnung).

Bestimmen Sie den maximalen und minimalen Radius für feste Energien E. Überlegen Sie sich dazu, welchen Wert $\dot{r}$ an der Stelle r_{min} bzw. r_{max} annimmt.

Im Folgenden betrachten Sie den Fall $\alpha < 0$, $E < 0$. Stellen Sie die Gesamtenergie mit r_{max} dar.

Bestimmen Sie $r(t)$ mit $r(0) = r_{max}$. *Tipp: Trennung der Veränderlichen*

Nach welcher Zeit $t = t_1$ landet das Teilchen im Zentrum?

Berechnen Sie die Bahnkurve $r(\varphi)$ mit $\varphi(r_{\mathrm{max}}) = 0$. *Tipps:* $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$, *Drehimpulsgleichung, Trennung der Veränderlichen, Substitution* $u = r_{max}/r$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathit{arcosh}(x) = 1/(\sqrt{x^2 - 1})$