

Zwangskräfte, Lagrangemultiplikatoren

---

Sie betrachten ein System in zwei Dimensionen mit einer Zwangsbedingung der Form

$$\chi(x_1, x_2) = 0.$$

Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Wie kann die Zwangsbedingung klassifiziert werden?

Zur Lösung des Systems können Sie eine geeignete Parametrisierung verwenden oder den erweiterten Lagrangeformalismus mit Lagrangemultiplikatoren. Betrachten Sie zunächst die zweite Variante. Die erweiterte Lagrangefunktion hat allgemein folgende Form:

$$L_\chi(q, \dot{q}, t; \lambda) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_k \lambda_k \chi_k(q, \dot{q}, t).$$

Wie sieht die ELG für das oben betrachtete System aus?

Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für das System, wobei  $\lambda$  wie ein weiterer Freiheitsgrad behandelt wird.

Stellen Sie Ihr Ergebnis so dar, dass Sie auf einer Seite der Gleichung die ELG der Lagrangefunktion ohne Zwangsbedingungen  $L(q, \dot{q}, t)$  stehen haben und auf der anderen Seite den zusätzlichen Term auf Grund der Zwangsbedingung, die Zwangskraft. Welche Bedingungen muss  $\chi$  erfüllen, damit dies möglich ist?

Betrachten Sie als Beispiel einen Massenpunkt der Masse  $m$ , der sich auf einer sinusförmigen Bahn bewegt  $y(x) = \sin x$ . Wie lautet die Zwangsbedingung  $\chi(x, y)$

Stellen Sie die erweiterte Lagrangegleichung auf, für den Fall, dass keine weiteren Kräfte wirken!

Lösen Sie die ELG für das System

Nutzen Sie, dass die Zwangsbedingung für alle Zeiten gelten muss, um  $\lambda$  zu bestimmen.

Setzen Sie  $\lambda$  in die Bewegungsgleichungen für  $x$  und  $y$  ein.

Bestimmen Sie die Zwangskräfte für den Massepunkt auf der sinusförmigen Bahn.

Bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichungen mithilfe einer geeigneten Parametrisierung. Finden Sie eine geeignete Parametrisierung von  $\gamma$ .

Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

Setzen Sie die Lagrangefunktion in die ELG ein und stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis, das Sie mithilfe der Lagrangemultiplikatoren erhalten haben.