Tutorium zur Theoretischen Mechanik

Variationsrechnung

Es hat sich gezeigt, dass man viele Bereiche der Physik mithilfe des Variationsprinzips beschreiben kann. In der theoretischen Mechanik besagt das Hamiltonsche Prinzip, dass für die tatsächliche Bahn eines Teilchens die Wirkung extremal ist. Die Wirkung ist definiert als

$$S(\gamma) = \int dt L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)\,.$$

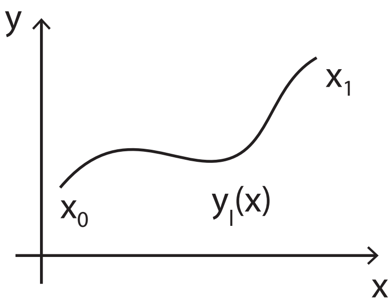
Was ist die Definitionsmenge und die Wertemenge von S? Was ist γ?

Die Wirkung ist also keine Funktion der Form $\mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, so dass die in der Schule kennengelernte Berechnung der Extrema über die erste Ableitung hier nicht verwendet werden kann. Eine Funktion, wie die Wirkung, in die eine Funktion eingesetzt wird und eine Zahl herauskommt, nennt man Funktional. Die Variationsrechnung ist eine mathematische Methode diejenige Funktion zu bestimmen, für die das Funktional extremal wird, z.B. die Bahn eines Teilchens, den optischen Lichtweg, den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten etc..
Die dabei auftretenden Funktionale sind von der Form

$$S = \int_{x_0}^{x_1} f(y(x), y'(x), x) dx\,.$$

Überprüfen Sie, ob die Wirkung diese Form hat.

Im Folgenden betrachten Sie hier das Beispiel einer Bahnkurve $y(x)$. Die gesuchte Lösung bezeichnen wir mit $y_l(x)$, eine Kurve, die nahe an der Lösungskurve liegt mit $Y(x)$. Zeichnen Sie in den nebenstehenden Graphen zwei mögliche Kurven $Y(x)$ ein. Beachten Sie, dass $Y(x)$die gleichen Randbedingungen hat wie $y_l(x)$.



Stellen Sie nun $Y(x)$ mit Hilfe von $y_l(x)$ und einer Funktion $\alpha\eta(x)$ dar, die die Abweichung der nahen Kurve von der Lösungskurve beschreibt. Der Faktor α skaliert dabei die Größe der Abweichung.

Welchen Wert hat η an den Stellen x_0 und x_1?

Für welchen Wert von α ist das Funktional S extremal? Wie sieht $Y(x)$ aus? (keine Rechnung)

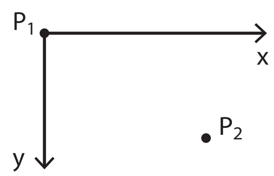
Wie sieht das Integral $S(\alpha)$ für die Kurven $Y(x)$ aus?

Überprüfen Sie das notwendige Kriterium, dass $S(\alpha)$ ein Minimum hat. Berechnen Sie dazu zunächst die Ableitung $dS/d\alpha$.

Sie erhalten zwei Terme im Integral. Formen Sie den Term proportional zu $\eta'(x)$ mithilfe partieller Integration so um, dass Sie einen Term proportional zu $\eta(x)$ erhalten.

Setzen Sie Ihr Ergebnis in die Ableitung $dS/d\alpha$ ein und verwenden Sie Lemma 3.1 aus der Vorlesung. Sie erhalten die Euler-Lagrange-Gleichung!

Eine bekanntes Problem der Variationsrechnung ist das Brachistochronenproblem. Die Frage dabei ist, wie ein reibungsfreies Achterbahngleis zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 gebaut sein muss, dass man in kürzester Zeit von P_1 nach P_2 kommt.



Wie sieht ein infinitesimales Wegelement ds aus?

Stellen Sie die Geschwindigkeit des Achterbahnwagens in Abhängigkeit von y dar.

Schreiben Sie nun die benötigte Zeit als Funktional.

Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen. Hinweis: Wählen Sie als Konstante $1/\sqrt{2a}$.

Sie erhalten $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}$. Es empfiehlt sich zur Bestimmung der Bahnkurve folgende Substitution zu verwenden: $y = a(1 - \cos\theta)$. Bestimmen Sie $x(\theta)$. Welche Form hat die Lösungskurve?