Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Jean-Nicolas Lang, René Meyer

8. Übung zur Klassischen Mechanik
5. Dezember 2016

Zentralkraftproblem / Zweizentrenproblem

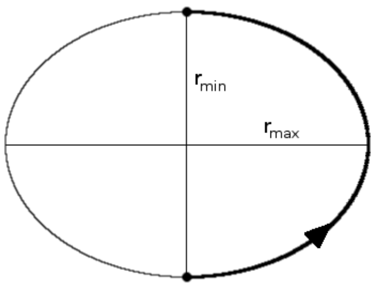
8.1 Periheldrehung

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass in Zentralkraftproblemen mit sphärischem Potential $V(\vec{x}) \equiv V(r)$ die Erhaltung des Drehimpulses $\vec{L}$ ($|\vec{L}| \equiv p_\phi$) und der Gesamtenergie E ausgenutzt werden kann, um die Trajektorie eines Massenpunktes analytisch aus dem Integral

$$\int \mathrm{d}\phi = \int \mathrm{d}r \frac{p_\phi/r^2}{\sqrt{2m(E - V(r) - p_\phi^2/2mr^2)}} \tag{1}$$

und anschließender Invertierung der Funktion $\phi(r)$ zu erhalten.

1. Wie Sie bereits wissen beschreibt $r(\phi)$ im Falle des ungestörten harmonischen Oszillators
$$V(r) = \frac{m\omega^2}{2} r^2 \tag{2}$$
Ellipsen mit dem Koordinatenursprung im Zentrum, d. h. die Periodizität des kleinsten Abstands r_{min} vom Ursprung (*Perihel*) ist in diesem Fall einfach π und r_{min} bzw. r_{max} (*Aphel*) sind die Halbachsen der Ellipse. Zeigen Sie, dass sich damit aus (1) eine Bewegung des Massenpunkts vom Perihel zum nächsten Perihel



in der Form
$$\Delta\phi = -2\sqrt{2m}\frac{\partial}{\partial p_\phi} \int_{r_{\text{min}}}^{r_{\text{max}}} \mathrm{d}r \sqrt{E - V(r) - p_\phi^2/(2mr^2)} \tag{3}$$
schreiben lässt, wobei $\Delta\phi = \pi$.

2. Betrachten Sie nun eine kleine Störung δV, d. h.

$$V(r) \to V(r) + \delta V(r) \tag{4}$$

und berechnen Sie die *Periheldrehung* $\delta\phi = \Delta\phi - \pi$, indem Sie (3) um $\delta V = 0$ taylorentwickeln und nur die erste Ordnung berücksichtigen.

(Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$\delta\phi = 2m \frac{\partial}{\partial p_\phi} \left(\frac{1}{p_\phi} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \, r(\varphi)^2 \delta V\left(r(\varphi)\right) \right).) \tag{5}$$

3. Werten Sie (5) für das Störpotential $\delta V = \lambda/r^2$ aus.

8.2 Restringiertes Dreikörperproblem und Lagrangepunkte

Betrachten Sie das *restringierte Dreikörperproblem*, d. h. die Bewegung einer leichten Testmasse m *ohne* gravitative Rückwirkung im Schwerefeld zweier schwerer umeinander rotierender Massenpunkte M_1 und M_2.

1. Berechnen Sie die kinetische Energie eines Massenpunkts in einem mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die 3-Achse rotierenden Koordinatensystem. Verwenden Sie dazu die Drehmatrix

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

um den Ortsvektor des Massenpunkts zu transformieren.

2. Nehmen Sie an, dass sich die beiden schweren Massen auf einer *kreisförmigen* Keplerbahn mit Abstand ρ und konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\kappa(M_1 + M_2)/\rho^3}$ bewegen. Verwenden Sie das Ergebnis aus der vorigen Teilaufgabe und zeigen Sie, dass in diesem Fall die Lagrangefunktion des leichten Massenpunkts durch

$$\begin{aligned} L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}\right) = {} & \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{x}}^2 + \omega^2 \vec{x}^2 + 2\omega\left(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2\right)\right) \\ & + \frac{\alpha_1}{\sqrt{(x_1-\rho_2)^2 + x_2^2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{(x_1+\rho_1)^2 + x_2^2}} \end{aligned} \tag{7}$$

mit $\alpha_i = \kappa m M_i$ und $\rho_i = \frac{M_i}{M_1+M_2}\rho$ gegeben ist.

(Hinweis: Vereinfachen Sie das Problem auf zwei Dimensionen, indem Sie sich auf Bewegungen der leichten Masse in der Bahnebene der schweren Massen beschränken, und betrachten Sie ein rotierendes Bezugssystem, in dem die schweren Massen M_i ruhen.)

3. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Testmasse im rotierenden Koordinatensystem auf.

4. Geben Sie die Gleichgewichtsbedingungen für den leichten Massenpunkt im rotierenden System an.

5. Zeigen Sie, dass drei der Lösungen dieser Gleichgewichtsbedingungen auf der Geraden durch die beiden schweren Massenpunkte liegen. (Die entsprechende transzendente Gleichung ist algebraisch nicht lösbar. Benutzen Sie deshalb ein graphisches Argument.)

6. Zeigen Sie, dass die beiden weiteren Lösungen der Gleichgewichtsbedingungen mit den schweren Massenpunkten ein gleichseitiges Dreieck bilden.