Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Fakultät für Physik und Astronomie
Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Jean-Nicolas Lang, René Meyer

6. Übung zur Klassischen Mechanik
21. November 2016

Symmetrien

6.1 Harmonischer Oszillator mit reduzierter Symmetrie

Betrachten Sie das Potential des sphärischen harmonischen Oszillators mit einer kleinen Störung δV:

$$V(\vec{x}) = \tfrac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}^2 + \delta V(\vec{x}). \tag{1}$$

1. Es sei
$$\delta V(\vec{x}) = \lambda_1 x_3. \tag{2}$$
Formulieren und lösen Sie die entkoppelten Bewegungsgleichungen für die kartesischen Koordinaten. Was ist die geometrische Interpretation der Lösung? Kann man sich dies schon in (1) verdeutlichen?

2. Es sei nun
$$\delta V(\vec{x}) = \lambda_2 x_3^2. \tag{3}$$
Formulieren und lösen Sie auch hier die die entkoppelten Bewegungsgleichungen für die kartesischen Koordinaten. Was erwarten Sie anschaulich für die Trajektorien im Vergleich zu den elliptischen Bahnen des ungestörten Problems?

6.2 Noether-Theorem

Betrachten Sie die beiden Lagrangefunktionen

a) $L_{\mathrm{HO}} = \dfrac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 - \dfrac{1}{2} m\omega^2 \vec{x}^2$ (Isotroper harmonischer Oszillator)

b) $L_{\mathrm{K}} = \dfrac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 - \dfrac{\alpha}{|\vec{x}|}\,.$ (Kepler-Problem)

Zeigen Sie, daß die Anwendung der folgenden Transformationen auf die jeweilige Lagrangefunktion eine totale Zeitableitung ergibt (wobei ϕ eine symmetrische 3×3-Matrix ist und $\vec{\rho}$ ein Vektor im dreidimensionalen Raum)

a) $\delta_\varphi \vec{x} = \varphi \dot{\vec{x}},$ $\quad\left(\delta_\varphi x_i = \sum_{j=1}^{3} \varphi_{ij} \dot{x}_j \text{ mit } \varphi_{ij} = \varphi_{ji}\right)$

b) $\quad \delta_\rho \vec{x} = 2(\vec{\rho}\vec{x})\dot{\vec{x}} - (\vec{\rho}\dot{\vec{x}})\vec{x} - (\vec{x}\dot{\vec{x}})\vec{\rho} \qquad (\text{mit } \vec{\rho} \in \mathbf{R}^3)$

d. h. $\delta_\varphi L_{\mathrm{HO}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_\varphi$ und $\delta_\rho L_{\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda_\rho$. Verwenden Sie das Noether-Theorem, um die zugehörigen Erhaltungsgrößen F_{ij} und $\vec{R}$ zu konstruieren.

6.3 Symmetrietransformationen

Betrachten Sie ein Teilchen auf der Ebene mit Konfigurationsraum $Q = \mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2) = \vec{x}$ und Phasenraum $TQ = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \ni (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = (\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ und der Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L : TQ \times \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ (\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &\mapsto L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - \frac{\beta}{2}\left(\vec{x}^2\right)^2 . \end{aligned} \tag{4}$$

1. Leiten Sie aus L die Euler-Lagrange Gleichungen (ELG) für x_1 und x_2 ab.

2. Betrachten Sie die einparametrige Familie ϕ von Koordinatentransformationen

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{R} \times TQ \times \mathbf{R} &\to Q \\ (s, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \mapsto \phi_s(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= \begin{pmatrix} \cos(s)x_1 - \sin(s)x_2 \\ \sin(s)x_1 + \cos(s)x_2 \end{pmatrix} \\ &= \vec{x} + s\delta_\phi \vec{x} + \mathcal{O}(s^2) \end{aligned} \tag{5}$$

   (a) Interpretieren Sie ϕ_s als geometrische Transformation der (x_1, x_2)-Ebene.

   (b) Bestimmen Sie die ELG, die Sie durch Anwendung der Transformation ϕ_s auf Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in den ELG für x_1 und x_2 erhalten.

   (c) Bestimmen Sie infinitesimale Transformationen von Koordinaten $\delta_\phi \vec{x}$ und Geschwindigkeiten $\delta_\phi \dot{\vec{x}}$.

   (d) Bestimmen Sie transformierten Lagrangefunktionen

   $$L^{\phi_s}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = L(\phi_s(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t), \dot{\phi}_s(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t), t) \tag{6}$$

   und die zugehörige infinitesimale Transformierte $\delta_\phi L$.

   (e) Leiten Sie aus L^{ϕ_s} die ELG für x_1 und x_2 ab und vergleichen Sie sie mit den ELG, die Sie in (b) erhalten haben.

   (f) Falls $\delta_\phi L$ die Voraussetzungen des Noether-Theorems erfüllt, leiten die die zugehöhrige Erhaltungsgröße I_ϕ ab.