Raimond Abt, Jean-Nicolas Lang, René Meyer

2. Übung zur Klassischen Mechanik
24. Oktober 2016

Newton'sche Bewegungsgleichungen Redux, Variationsrechnung

2.1 Eindimensionaler harmonischer Oszillator Redux

Betrachten Sie den gedämpften und getriebenen harmonischen Oszillator in einer Dimension mit dem Anfangswertproblem

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t), \dot{x}(t), t) = -k\,x(t) - 2m\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + F_{\text{ext}}(t) \tag{1a}$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbf{R} \tag{1b}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 \in \mathbf{R} \tag{1c}$$

1. Lösen sie das Anfangswertproblem (1) zunächst für verschwindende äußere Kraft $F_{\text{ext}} \equiv 0$. Machen Sie dazu wieder den üblichen Exponentialansatz
$$x(t) = \alpha e^{\lambda t}\,,\ (\alpha, \lambda \in \mathbf{C}) \tag{2}$$
und behandeln Sie auch den Fall $\gamma^2 = k/m$.

2. Lösen sie das Anfangswertproblem (1) für eine harmonische äußere Kraft $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$ indem Sie zur soeben gefundenen Lösung der homogenen Differentialgleichung noch eine Partikularlösung mit dem „Ansatz vom Typ der rechten Seite“ $x(t) = A\sin(\omega_0 t)$ addieren. Auch hier empfiehlt es sich, Kraft und Ansatz zu komplexifizieren:
$$F_{\text{ext}}(t) = F_0 \sin(\omega_0 t) \to F_0 e^{-i\omega_0 t} \tag{3a}$$
$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) \to A e^{-i\omega_0 t} \tag{3b}$$

3. Zeigen Sie anhand der Lösungen, daß die Energie
$$E(t) = \frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\right)^2 + \frac{k}{2}x^2(t) \tag{4}$$
für verschwindende Dämpfung $\gamma = 0$ und äußere Kraft $F_{\text{ext}} \equiv 0$ erhalten ist und diskutieren Sie die Zeitabhängigkeit von $E(t)$ als Funktion von γ im allgemeinen Fall. Berücksichtigen Sie insbesondere eine harmonische äußere Kraft $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$.

2.2 Variationsrechnung mit Seifenblasen

Zwischen zwei Kreisringen mit Radius R, die bei $x = -x_0$ und $x = x_0$ zentriert in der yz-Ebene liegen, sei eine Seifenhaut gespannt (s. Skizze). Aufgrund der Oberflächenspannung wird sich die Seifenhaut so ausbilden, dass die entsprechende Oberfläche minimal ist.

1. Das gesamte Problem ist rotationssymmetrisch um die x-Achse. Zeigen Sie, dass die Fläche der Rotationsfigur um die x-Achse für die Funktion $y : [-x_0, x_0] \to \mathbf{R}$ zwischen den Kreisringen durch

$$F(y) = \int_{-x_0}^{x_0} 2\pi y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\mathrm{d}x \tag{5}$$

   mit $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ gegeben ist.

2. Benutzen Sie nun die in der Vorlesung kennengelernte Methode der Variationsrechnung, um die Minimalfläche zu finden, die von der Seifenhaut gebildet wird. Gesucht ist also die Funktion y, die $F(y)$ minimiert.

   (Hinweis: Zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Problem in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\sqrt{1 + y'^2} - y\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0 \tag{6}$$

   geschrieben werden kann.)