Prof. Dr. Thorsten Ohl
Raimond Abt, Jean-Nicolas Lang, René Meyer

1. Übung zur Klassischen Mechanik
17. Oktober 2016

Newton'sche Bewegungsgleichungen

1.1 (Nicht-)Konservative Kraftfelder

Betrachten Sie die folgenden Familien von Kraftfeldern auf geeigneten Definitionsbereichen $D^{(n)}_\eta \subseteq \mathbf{R}^3$:

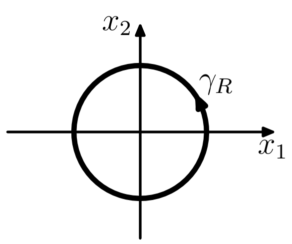
$$F^{(1)}_\eta : D^{(1)}_\eta \ni \vec{x} \mapsto r^\eta \cdot \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \tag{1a}$$
$$F^{(2)}_\eta : D^{(2)}_\eta \ni \vec{x} \mapsto r^\eta_{12} \cdot (x_1\vec{e}_1 - x_2\vec{e}_2) \in \mathbf{R}^3 \tag{1b}$$
$$F^{(3)}_\eta : D^{(3)}_\eta \ni \vec{x} \mapsto r^\eta_{12} \cdot (x_2\vec{e}_1 - x_1\vec{e}_2) \in \mathbf{R}^3 \tag{1c}$$
$$F^{(4)}_\eta : D^{(3)}_\eta \ni \vec{x} \mapsto r^\eta_{12} \cdot (x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2) \in \mathbf{R}^3 \tag{1d}$$

wobei $r_{12} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Skizzieren Sie die Felder $\vec{F}^{(n)}_\eta$ als Vektorpfeile in der von den Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aufgespannten Ebene (hier genügt es, zwischen den Fällen $\eta > -1$, $\eta = -1$ und $\eta < -1$ zu unterscheiden).

Bestimmen Sie, abhängig von der Potenz $\eta \in \mathbf{R}$,

1. den maximalen Definitionsbereich $D^{(n)}_\eta$,
2. die maximale Bereiche $C^{(n)}_\eta \subseteq D^{(n)}_\eta$, auf denen $F^{(n)}_\eta$ konservativ ist,
3. eine Potentialfunktion $V^{(n)}_\eta : C^{(n)}_\eta \to \mathbf{R}$ mit $\vec{F}^{(n)}_\eta = -\vec{\nabla} V^{(n)}_\eta$, sofern sie existiert,
4. das Kurvenintegral
$$I^{(n)}_\eta(R) = \int_{\gamma_R} \mathrm{d}\vec{\xi} \cdot \vec{F}^{(n)}_\eta(\vec{\xi}) \tag{2}$$
über den gegen den Uhrzeigersinn umlaufenen Kreis γ_R mit Radius R und Mittelpunkt $\vec{0}$ in der von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aufgespannten Ebene



1.2 Eindimensionaler harmonischer Oszillator

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator in einer Dimension, d. h. das Anfangswertproblem

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) = F(x(t)) = -k\,x(t) \tag{3a}$$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R} \tag{3b}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) = v_0 \in \mathbf{R} \tag{3c}$$

1. Zeigen Sie, daß wenn eine komplexwertige Funktion $z : I \to \mathbf{C}$ mit $t_0 \in I \subseteq \mathbf{R}$ die Differentialgleichung (3a) löst, ihr Realteil $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ zur Lösung des reellen Anfangswertproblems (3) benutzt werden kann.

2. Machen Sie den üblichen Exponentialansatz für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$x(t) = \alpha \mathrm{e}^{\lambda t}\,,\ (\alpha, \lambda \in \mathbf{C}) \tag{4}$$

und zeigen Sie, daß alle vier sich daraus ergebenden Lösungen der Differentialgleichung (3a)

$$z_1(t) = \alpha_{1,+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \alpha_{1,-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{5a}$$

$$x_2(t) = \alpha_{2,s}\sin(\omega t) + \alpha_{2,c}\cos(\omega t) \tag{5b}$$

$$x_3(t) = \alpha_3 \sin(\omega t + \delta_3) \tag{5c}$$

$$x_4(t) = \alpha_4 \cos(\omega t + \delta_4) \tag{5d}$$

mit

$$\alpha_{1,+}, \alpha_{1,-} \in \mathbf{C}\,,\ \omega, \alpha_{2,s}, \alpha_{2,c}, \alpha_3, \alpha_4, \delta_3, \delta_4 \in \mathbf{R} \tag{6}$$

zur gleichen Lösung des reellen Anfangswertproblems (3) führen und geben Sie diese Parameter als Funktionen von m, k, t_0, x_0 und v_0 an.