

Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Lehrstuhl für Physik und ihre Didaktik
Fakultät Physik und Astronomie

Schriftliche Hausarbeit

im Rahmen der ersten Staatsprüfung
für das Lehramt an Gymnasien

Realisierung des nichtlinearen Systems „chaotisch tropfender Wasserhahn“ mit einfachen Mitteln

Möglichkeiten, Grenzen und Auswirkungen der Reduktion
auf den Erkenntnisgewinn

Eingereicht von
Jonas Vollhardt

im
September 2021

Betreuer:
Dr. Stephan Lück

Prüfer:
Dr. Stephan Lück

*»Poincaré hatte eine Anarchistenbombe ins Newtonsche Modell des Sonnensystems
geworfen und drohte es zu sprengen.«*

(Briggs & Peat, 1990, S. 36)

*»Wenn wirkliches Neuland betreten wird, kann es aber vorkommen, daß nicht nur neue
Inhalte aufzunehmen sind, sondern daß sich die Struktur des Denkens ändern muß,
wenn man das Neue verstehen will. Dazu sind offenbar viele nicht bereit
oder nicht in der Lage.«*

(Heisenberg, 1969, S. 102)

*»[V]ielleicht ist ja eine Welt sogar menschlicher, in der nicht alles determiniert und
nicht alles berechenbar ist, eine Welt, in der es – dank der Quantenereignisse – Zufall,
und damit auch Glück, gibt, in der – weil nicht alle Probleme algorithmisch lösbar sind –
Phantasie und Einfallsreichtum, Raten und Probieren, Kreativität und Originalität noch
gefragt sind und in der man, wie die Chaos-Theorie zeigt, auch bei chaotischem
Verhalten immer noch sinnvoll nach einfachen Grundgesetzen suchen kann.«*

(Vollmer, 1988, S. 350)

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Bedeutung und grundlegender Charakter nichtlinearer Systeme	1
1.2. Aufbau der Arbeit und Forschungsfragen	3
2. Theoretische Grundlagen nichtlinearer Dynamik	4
2.1. Kausalität, Determinismus und deren Gültigkeit in physikalischen Systemen	4
2.2. Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme	5
2.3. Stabilitätstheorie dynamischer Systeme	7
2.4. Charakterisierung und Eigenschaften chaotischer Dynamik	10
2.5. Möglichkeiten zur Darstellung chaotischer Systeme	12
2.6. Wege ins Chaos	13
3. Stand der Forschung zum System „tropfender Wasserhahn“	16
3.1. Theoretische Modellierung des Systems	16
3.2. Experimentelle Befunde und deren theoretische Hintergründe	22
3.2.1. Eigenschaften der Tropfenbildung	22
3.2.2. Systemdynamik, Übergangsverhalten und Attraktoren	24
3.2.3. Bi- und Multistabilität	26
3.2.4. Hysterese	26
3.2.5. Oberflächenspannung und Temperaturabhängigkeit	27
3.3. Versuchsaufbauten	28
4. Experimentelle Realisierung des tropfenden Wasserhahns mit einfachen Mitteln	31
4.1. Versuchsaufbau	32
4.1.1. Tropfeinheit und Auffangbehältnis	32
4.1.2. Messung bei fester Fließgeschwindigkeit	34
4.1.3. Messung bei variabler Fließgeschwindigkeit	35
4.1.4. Reduzierung von Störeinflüssen	36
4.2. Messwerterfassung	38

5. Auswertung und Ergebnisse	41
5.1. Theoretischer Hintergrund für die Datenaufbereitung	41
5.2. Konkretes Vorgehen bei der Datenaufbereitung	46
5.3. Messergebnisse	49
5.3.1. Tropfenbildung	49
5.3.2. Qualität der Messdaten	50
5.3.3. Tropfdiagramme	51
5.3.4. Übergangsverhalten und Attraktoren	54
6. Potenzial und Grenzen des mit einfachen Mitteln durchgeführten Versuchs	59
6.1. Qualität der erhaltenen Ergebnisse	59
6.2. Erkenntnisgewinn und Umsetzbarkeit im Unterrichts- und Praktikumskon- text	61
7. Ausblick	65
Literaturverzeichnis	67
A. Anhang	69
A.1. Graphiken zur Veranschaulichung der theoretischen Grundlagen	69
A.2. Weitere Abbildungen zu experimentellen Befunden in der Literatur	72
A.3. Experimentelle Realisierungen des Systems „tropfender Wasserhahn“ in Veröffentlichungen	76
A.4. Weitere Fotos vom Versuchsaufbau	79
A.5. Stroboskopaufnahmen der Tropfenbildung	82
A.6. Weitere Tropfdiagramme und Return-Maps	84
A.7. Mathematica-Rechenblatt zur Berechnung des theoretischen Fitfehlers bei polynomiell statt exponentiellem Fit	87
A.8. Python-Skript zur Aufbereitung der Messdaten	89

1. Einleitung

1.1. Bedeutung und grundlegender Charakter nichtlinearer Systeme

Kann ein einziger Flügelschlag eines Schmetterlings ein Unwetter auslösen? Wohl kaum, würde man denken. Und doch ist es möglich, dass so ein kleines Tier ein so großes Gefüge wie das Wettergeschehen empfindlich beeinflussen kann. Wie lässt sich erklären, dass sich das wirre und chaotische Spiel der Wellen auf offener See plötzlich ordnen und zu einer einzigen glatten Welle werden kann, die hunderte von Kilometern weit zu wandern vermag – durch Schiffe und Stürme hindurch – ohne auch nur den kleinsten Gestaltverlust? (Briggs & Peat, 1990, S. 14) Oder wie ist es möglich, dass bei gewissen Temperaturzunahmen im globalen Klima sogenannte Kipppunkte (z. B. Abschmelzen des Grönländischen Eisschildes, Austrocknen des Amazonas-Regenwaldes etc.) überschritten werden, bei denen es zu *unerwartet* gravierenden, sehr raschen und gleichzeitig unumkehrbaren Umweltveränderungen kommt?

Diese Reihe an Fragen ließe sich beliebig fortsetzen, und doch gibt es eine Gemeinsamkeit, die all diese Systeme verbindet: Sie sind nicht linear! Nichtlinearität steht häufig im Widerspruch zu unserer Intuition und der Art und Weise, wie wir Abläufe in der Umwelt wahrnehmen: Wir brauchen zwar doppelt so viel Kraft, um einen doppelt so schweren Gegenstand hochzuheben. Aber ein Wasserhahn tropft nicht zwingend zwei Mal so schnell, wenn die zweifache Menge an Wasser herauskommt. Denn an der Austropfstelle können sich Schwingungen und Turbulenzen bilden, die zu chaotischem Tropfverhalten führen und eine lineare Zunahme der Tropfabstände verhindern. Dieses einfache Beispiel zeigt bereits: Viel zu häufig gehen wir fälschlich von proportionalen Zusammenhängen aus.

Auch die Geschichte der Physik unterliegt diesem Problem: Die über viele Jahrhunderte als uneingeschränkt gültig betrachtete klassische Physik nach Newton ist stillschweigend vom Prinzip der sogenannten *starken Kausalität* ausgegangen, und nicht, wie es richtig wäre, der *schwachen Kausalität*. Sprich: Die gefunden physikalischen Gesetzmäßigkeiten (so sie denn wahr sind) sagen per se nur, dass aus *gleichen* Ursachen (z. B. gleichen Startbedingungen für ein Problem) auch *gleiche* Wirkungen (z. B. gleiche Teilchenbahnen) folgen. Man ging und geht aber häufig davon aus, dass aus *ähnlichen* Ursachen auch *ähnliche*

Wirkungen folgen. Letzteres gilt allerdings nur bei linearen Systemen. Und tatsächlich ist unsere Umwelt häufig alles andere als linear.

Als erstes ist Henri Poincaré 1908 auf die verblüffenden, chaotischen Eigenschaften nichtlinearer Systeme gestoßen: Die Bahnen zweier Körper in einem abgeschlossenen System lassen sich mit den Newton-Gleichungen genau berechnen. Sobald aber ein weiterer Körper hinzukommt (z. B. das Sonne-Erde-Mond-System), gibt es keine analytische Lösung der Bewegungsgleichungen mehr. Historisch wird ein Drei-Körper-Problem mittels Störungstheorie berechnet, also durch iterative Näherungsschritte, beginnend beim Zwei-Körper-Problem, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Poincaré bemerkte, dass sich durch kleine Störungen, also geringen Einfluss des dritten Körpers, die meisten der möglichen Zwei-Körper-Problem-Bahnen nur gering änderten. Manche Bahnen jedoch erfahren unter winzigen Störungen sehr starke, grundlegende Änderungen, und können sogar chaotisches Verhalten zeigen. (Briggs & Peat, 1990, S. 34 ff.). Dieser Erkenntnis ist jedoch wenig Aufmerksamkeit geschenkt worden, und sie ist wieder in Vergessenheit geraten.

Als moderner Begründer der Chaostheorie wird Edward Lorenz gesehen. Er ist 1961 der Frage nachgegangen, ob Wetterprognosen zumindest in der Theorie exakt sein können – also wenn alle Anfangsbedingungen vollständig bekannt wären. Bei numerischen Kalkulationen mittels Computer stellt er fest, dass die Berechnung einer präzisen Wettervorhersage auch in der Theorie bei noch so sorgfältig bestimmten Anfangsbedingungen und perfektem Modell nicht möglich ist. Denn schon kleinste Schwankungen in den Anfangsbedingungen können ganz grundsätzlich unterschiedliche Prognosen bewirken; und jede Messung, auch wenn sie noch so gut ist, weist (winzigste) Messfehler auf. (Zudem rechnet jeder Computer auch nur mit endlicher Genauigkeit.) Also auch die Wetterprognose gehorcht nicht dem Prinzip der starken Kausalität, das für präzise Vorhersagen nötig wäre. (Argyris et al., 2017, S. XVII f.) Mit der zunehmenden Verfügbarkeit von Computern hat sich in der Folgezeit bei diversen Systemen chaotisches Verhalten finden und untersuchen lassen. Bis heute ist die Untersuchung nichtlinearer Systeme und die damit verbundene Chaostheorie ein Forschungsgebiet, in dem noch sehr viele Fragen offen oder unverstanden sind. Gleichzeitig stecken große Hoffnungen und Erwartungen in ihm – man denke beispielsweise an drängende Fragen im Zusammenhang mit der Klimaerwärmung (z. B. Bei welchem Temperaturanstieg wird welcher Kipppunkt überschritten?) oder an die Berechnung von Eintrittsbedingungen eines Blackouts.

Zwar kann man die Fehlannahme eines global gültigen starken Kausalitätsprinzips einem Gros der Gesellschaft wahrlich nicht zur Last legen, aber gerade Naturwissenschaftler:innen darf sie nicht passieren. Umso wichtiger scheint es da, ein Bewusstsein für die irregulären, chaotischen Eigenschaften vieler Systeme zu schaffen. Leider sind große Teile des Physik-Schulunterrichts und des universitären Physikstudiums von einem stillschwei-

gend implizierten starken Kausalitätsprinzip durchsetzt, mit dem erst bei Erreichen von quantenphysikalischen Inhalten auf mikroskopischer Ebene gebrochen wird. Auf makroskopischer Ebene (die für unsere Wahrnehmung und Intuition viel wichtiger ist) bleibt die Fehlimplikation häufig unangetastet. So ist es für die Ausbildung zukunftsfähiger Naturwissenschaftler:innen nur nötig, nichtlineare Dynamik bereits konsequent mit in die (Hoch-)Schulbildung zu integrieren.

1.2. Aufbau der Arbeit und Forschungsfragen

In dieser Arbeit wird das bereits oben erwähnte System „tropfender Wasserhahn“ theoretisch wie praktisch näher untersucht. Zunächst werden die wichtigsten theoretischen Grundlagen nichtlinearer Dynamik dargestellt (Kapitel 2) und eine Übersicht über den aktuellen Forschungsstand zum System tropfender Wasserhahn gegeben (Kapitel 3). Anschließend wird dargestellt, wie es sich mit einfachen Mitteln (beispielsweise denen einer Physik-Schulsammlung) aufbauen lässt (Kapitel 4.1), was bei der Messwerterfassung zu beachten ist (Kapitel 4.2), wie die Datenauswertung vorgenommen werden kann und welche Phänomene trotz einfachen Aufbaus beobachtbar sind (Kapitel 5). Denn wird deutlich primitiveres Equipment verwendet als in der Literatur, ist eine wesentlich schlechtere Kontrolle der Systemvariablen wie auch der Umgebungsbedingungen zu erwarten. Dass nichtlineare Systeme teils eine extreme Sensitivität hinsichtlich dieser Bedingungen aufweisen, wurde oben bereits erwähnt und wird in Kapitel 2 weiter vertieft. Die erhaltenen Messergebnisse werden mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen. Abschließend findet eine Diskussion des zuvor vorgestellten Versuchsaufbaus in Verbindung mit den erhaltenen Ergebnissen statt (Kapitel 6). So sollen Potenzial und Grenzen des nichtlinearen Systems „tropfender Wasserhahn“ im Unterrichts- und Praktikumskontext eingeschätzt werden.

Es geht also um folgende Fragen:

Wie kann das System „tropfender Wasserhahn“ mit möglichst einfachen Mitteln aufgebaut werden? Wie können alle nötigen Größen mit breit verfügbaren Messwerterfassungssystemen gemessen werden?

Welche Phänomene und Eigenschaften nichtlinearer Dynamik sind trotz der Vereinfachungen im Aufbau und der damit in Kauf genommenen Fehler beobachtbar? Können sie mit der Qualität anderenorts veröffentlichter Ergebnisse mithalten?

Und schließlich: Erscheint der so realisierte tropfende Wasserhahn als ein Einstiegsversuch zur Entdeckung und Untersuchung nichtlinearer Phänomene im Rahmen eines Schulversuchs oder Praktikumsversuchs an Hochschulen sinnvoll? Bietet er gute Einblicke in die Besonderheiten chaotischer Dynamik, und welchen Mehrwert bringt das?

2. Theoretische Grundlagen nichtlinearer Dynamik

Nachfolgend sollen wichtige theoretische Grundlagen für den Umgang mit nichtlinearen Systemen und für die Beschreibung chaotischer Phänomene dargestellt werden. Da dies im Wesentlichen eine praktisch und phänomenologisch orientierte Arbeit sein soll, die gleichzeitig einen ersten Zugang zu nichtlinearer Dynamik vermitteln möchte, wird an vielen Stellen auf eine tiefergehende Ausführung verzichtet. Eine detaillierte mathematische Beschreibung nichtlinearer Systeme findet sich beispielsweise in Reitmann 1996 oder sehr umfänglich in Argyris et al. 2017 (inkl. einiger Anwendungen und Beispiele).

2.1. Kausalität, Determinismus und deren Gültigkeit in physikalischen Systemen

Unter **Determinismus** versteht man in der Physik die Auffassung, dass aus dem Zustand eines Systems zu einer bestimmten Zeit alle zukünftigen Zustände vorausberechnet werden können. Dies gilt, wenn das System keine probabilistischen (also zufälligen) Anteile enthält. Der zugrunde liegende Wirkmechanismus dieser Möglichkeit, Zustände vorausberechnen zu können, wird durch die **Kausalität** eines Systems beschrieben: Die geltenden Naturgesetze sind die Verknüpfung von Ursache und Wirkung, legen das Geschehen in der Natur über die Zeit hinweg eindeutig fest und liefern damit die Erklärung für ein beobachtetes Systemverhalten. Die Tatsache, dass in deterministischen Systemen aus *gleichen* Ursachen *gleiche* Wirkungen folgen, nennt man **schwaches Kausalitätsprinzip**. Lange Zeit ist die Physik als ausschließlich deterministische Disziplin verstanden worden.

Dies hat Simon Laplace 1812 in Form des später nach ihm benannten **Laplace'schen Dämons** formuliert: Dieser Dämon, da er Lage und Position aller Teilchen des Universums exakt kennt, kann genau vorherberechnen, wie sich das Universum und jeder einzelne Vorgang in ihm weiterentwickeln wird, und wie dessen Verhalten in der Vergangenheit war (Laplace, 1812, S. 2). Aufgrund mangelnder mathematischer Verfahren und Computerunterstützung bei der Berechnung von zukünftigen Systemzuständen hat man häufig komplexere Systeme durch lineare Näherungen beschrieben (mit denen man analytisch und

händisch umgehen konnte). So hat sich in der klassischen Physik das Prinzip der schwachen Kausalität stillschweigend auf das **Prinzip der starken Kausalität** erweitert – *ähnliche* Ursachen haben *ähnliche* Wirkungen. Dies stimmt bei linearen Systemen zwar, aber nicht im Allgemeinen.

Spätestens jedoch mit der Quantenmechanik und Heisenbergs quantenmechanischen Umdeutungen atomarer Vorgänge kann die Vorstellung von Physik als rein deterministische Wissenschaft nicht mehr in Einklang gebracht werden: Die Quantentheorie enthält unreduzierbare probabilistische Elemente, die sich nichtdeterministisch verhalten. Sie impliziert die Unschärferelation, die auch in der Theorie die gleichzeitige, exakte Bestimmung von Ort und Impuls eines Teilchens unmöglich macht und die insgesamt Gesetze auf Quantenebene als statistische, nichtdeterministische Gesetze formuliert. Durch Entwicklung der Chaostheorie musste außerdem die Gültigkeit des starken Kausalitätsprinzips grundlegend eingegrenzt werden: Sämtliche nichtlinearen Systeme können – wie in der Einleitung bereits ausgeführt – extrem sensibel auf kleinste Schwankungen in den Anfangsbedingungen reagieren, oder bei numerischer Berechnung der Folgezustände auf kleinste Rundungsfehler, und damit unerwartet plötzlich unterschiedliche Zustände annehmen. Da sich Anfangsbedingungen weder praktisch (Messungengenauigkeiten) noch theoretisch (Heisenberg'sche Unschärferelation) genau bestimmen und reproduzieren lassen, und auch computergestützte Rechnungen konzeptionsbedingt nicht mit analytischer Genauigkeit ausgeführt werden können, sind nichtlineare Systeme zeitlich nicht präzise vorhersagbar und auch qualitativ *nicht* mit der Vorstellung eines Laplace'schen Dämons vereinbar.

Die Chaosforschung beschäftigt sich in der Regel mit deterministischen Systemen (also mit Systemen ohne stochastische Anteile in ihrer mathematischen Beschreibung). Dies ist mit dem Ausdruck **deterministisches Chaos** gemeint, und – wie ausgeführt – keineswegs ein Widerspruch. (Argyris et al., 2017, S. 16-24) In den nachfolgenden Ausführungen werden stets rein deterministische Systeme betrachtet.

2.2. Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme

Physikalische Prozesse und deren zeitliche Entwicklung können mathematisch mithilfe von Differentialgleichungen (DGL) beschrieben werden. Eine DGL, in der nur Ableitungen nach genau einer Variablen auftreten, heißt **gewöhnliche Differentialgleichung**. Treten Ableitungen nach mehreren Variablen auf, spricht man von einer **partiellen Differentialgleichung**. Zur Behandlung wichtiger Grundlagen nichtlinearer Dynamik genügt es, sich auf gewöhnliche DGLs zu beschränken. Auftretende Ableitungen sind stets Ableitungen nach der Zeit. Sei also der *Zustand* eines (kontinuierlichen) physikalischen

Systems zur Zeit t durch n Variablen $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ vollständig beschrieben, dann wird dessen *zeitliche Entwicklung* durch ein **System an Differentialgleichungen**

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad (2.1)$$

beschrieben, wobei $\vec{x}(t) := (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $\vec{f} := (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gelte. Der funktionale Zusammenhang \vec{f} beschreibt die wechselseitigen Abhängigkeiten der einzelnen Zustandsvariablen x_i . Ist für eine Zeit t_0 der Systemzustand $\vec{x}(t_0)$ gegeben, sind mit Gleichung (2.1) alle vorigen und nachfolgenden Zustände prinzipiell bestimmbar, falls eine eindeutige Lösung $\vec{x}(t)$ existiert. Das System ist dann vollständig determiniert.

(2.1) nennt man auch **dynamisches System**. O. B. d. A. ist (2.1) ein **autonomes**, also nicht explizit zeitabhängiges System aus n DGLs erster Ordnung: Jede DGL n -ter Ordnung kann durch Einführung zusätzlicher Variablen in ein System aus n DGLs erster Ordnung transformiert werden; und jedes nicht-autonome System kann durch Einführung genau einer zusätzlichen Variable $x_{n+1}(t) := t$ mit $\dot{x}_{n+1} = 1$ in ein autonomes System überführt werden. Das dynamische System eines zeitdiskreten Prozesses mit Zeitschritt τ hat die Form

$$\vec{x}(t + \tau) = \vec{f}(\vec{x}(t)). \quad (2.2)$$

Handelt es sich um ein lineares System, dann ist \vec{f} eine lineare Abbildung. Das dynamische System vereinfacht sich dann zu

$$\dot{\vec{x}}(t) = L(t)\vec{x}(t), \quad (2.3)$$

wobei L die Abbildungsmatrix von \vec{f} bezeichne. I. A. kann L zeitabhängig sein. Ist für ein lineares System ein Anfangswertproblem gegeben, so impliziert der Satz von Picard-Lindelöf die eindeutige Existenz einer Lösung auf einem größtmöglichen Existenzintervall. Zum Bestimmen dieser Lösung stehen im linearen Fall explizite Berechnungsvorschriften bereit. Dies ist der Grund, weshalb physikalische Problemstellungen gerne linear approximiert betrachtet werden.

Im nichtlinearen Fall lässt sich häufig keine eindeutige Lösung finden. Auch ist die Bestimmung einer expliziten Darstellung einer Lösung häufig nicht möglich. Ist die Existenz einer Lösung erwiesen, lassen sich mithilfe verschiedener mathematischer Hilfsmittel (z. B. Satz über die implizite Funktion) dennoch viele Eigenschaften der Lösung(en) ermitteln.

Im Gegensatz zu rein theoretisch vorgegebenen dynamischen Systemen lassen sich bei einem realen physikalischen System durch Messung der Zustandsvariablen viele weitere Erkenntnisse gewinnen: Spannt man mit den n Zustandsvariablen einen n -dimensionalen

Raum auf, erhält man den sogenannten **Phasenraum**¹. Der (messbare) Zustand des Systems zu einem Zeitpunkt wird durch einen Punkt in dessen Phasenraum repräsentiert, der sich mit der Zeit durch den Phasenraum bewegt. Der durch die Bewegung eines Zustandspunktes in diesem Raum entstehende Graph heißt **Trajektorie**, **Bahnkurve** oder **Orbit**. Die Bewegung findet natürlich stets tangential zur momentan wirkenden Geschwindigkeit statt. Diese wurde oben bereits eingeführt – es handelt sich um die Abbildung $\vec{f}(\vec{x}(t))$. Ist \vec{f} bekannt, kann also ohne Integration ein Phasenportrait erstellt werden. Die Gesamtheit aller Bewegungen im Phasenraum nennt man **Phasenfluss**. Die Gestalt der Trajektorien geben viele Eigenschaften der (einer) gesuchten Lösung $\vec{x}(t)$ preis. Zum Beispiel kann man (graphisch) Informationen über ihre Stabilitätseigenschaften, d. h. über ihr Langzeitverhalten, (s. Kap. 2.3) erhalten. Da jede physikalische Messung über einen gewissen Zeitraum eine Trajektorie darstellt, sind daraus umgekehrt sowohl Eigenschaften von \vec{x} wie auch von \vec{f} bestimmbar. Werden rein deterministische Systeme betrachtet, liegt jeder Punkt im Phasenraum, der zum dynamischen System gehört, auf einer eindeutigen Trajektorie. Daher können sich (solche) Trajektorien nicht schneiden. Mathematisch ist das mit der Eindeutigkeit einer Lösung äquivalent.

(teilweise entnommen aus Argyris et al. 2017, S. 31 f.)

2.3. Stabilitätstheorie dynamischer Systeme

Lokale Stabilität und Lyapunov-Stabilität

Man betrachte folgendes Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0. \quad (2.4)$$

O. B. d. A. kann hierbei der Zeitpunkt $t = 0$ gewählt werden, da autonome Systeme invariant gegenüber einer Zeitverschiebung sind (vgl. Flussaxiome). Wenn \vec{f} nicht-linear ist und alle $f_i(\vec{x}(t))$ stetig partiell nach den Variablen x_1, x_2, \dots, x_n differenzierbar sind, hat (2.4) genau eine Lösung \vec{x} . Physikalisch handelt es sich bei einem AWP um ein System, für das zu einem konkreten Zeitpunkt alle Zustandsvariablen (durch Messung) bekannt sind. Einen ersten Einblick in qualitative Eigenschaften des Systems können **stationäre Lösungen** \vec{x}_s liefern. Synonym spricht man häufig auch von **singulären Punkten** oder **Fixpunkten**. Eine Lösung heißt genau dann stationär, wenn

$$\dot{\vec{x}}_s \equiv 0 \quad (2.5)$$

¹Für ein eindimensionales Pendel wird beispielsweise der Phasenraum durch Auslenkung und Geschwindigkeit aufgespannt. Für eine Bewegung durch den dreidimensionalen Raum ist der zugehörige Phasenraum sechsdimensional.

gilt. Sie sind leicht zu bestimmen. Möglicherweise lassen sich für sie Aussagen über ihre **lokale (räumliche) Stabilität** finden (s. u.). Damit ist gemeint, wie Trajektorien, die sich in der Umgebung um einen singulären Punkt befinden, darin verlaufen. So kann möglicherweise gezeigt werden, dass Trajektorien in diesem Punkt gestartet sind oder dort enden, dass sie geradlinig auf diesen Punkt hin zulaufen oder sich in diesen Punkt hinstrudeln, oder dass benachbarte Trajektorien geschlossene Wirbel um diesen Punkt bilden. Eine Klassifikation des lokalen Stabilitätsverhaltens um Singularitäten in zwei Dimensionen ist zur Veranschaulichung in Abbildung A.1 zu finden.

Berechnet man für einen beliebigen Punkt $\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{\xi}$ des Phasenraums in einer (kleinen) Umgebung um den singulären Punkt eine Taylor-Linearisierung des Systems (2.4), ergibt dies das **linearisierte System**

$$\dot{\vec{\xi}} = D(\vec{x}_s)\vec{\xi}. \quad (2.6)$$

D bezeichne die Jacobi-Matrix von \vec{f} . Für singuläre Punkte ist $D(\vec{x}_s)$ konstant; man erhält also ein lineares dynamisches System mit konstanten Koeffizienten. Falls kein Eigenwert von $D(\vec{x}_s)$ verschwindet oder rein imaginär ist, entspricht das lokale Stabilitätsverhalten um \vec{x}_s des linearisierten Systems dem lokalen Verhalten um \vec{x}_s des nicht-linearen Systems (2.4). Das ist erfreulich, denn für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten lässt sich das lokale Stabilitätsverhalten um stationäre Lösungen sicher berechnen. (Argyris et al., 2017, S. 51 ff.)

Eine singuläre Lösung, die alle Trajektorien einer gewissen Umgebung einfängt, heißt **asymptotisch stabil**. Stößt sie alle zu nahe kommenden Bahnkurven ab, heißt sie **asymptotisch instabil**. Ein asymptotisch stabiler singulärer Punkt/Fixpunkt ist das einfachste Beispiel für einen Attraktor (s. u.) des Phasenflusses eines dynamischen Systems. Physikalisch sind solche lokalen Stabilitätsaussagen von Interesse, denn: Kennt man einen stationären Punkt (d. h. das entsprechende Wertetupel der Systemvariablen), und stellt durch Messung am System fest, dass sich die Systemvariablen gerade in (enger) Nähe um den stationären Punkt befinden, kann man bei Kenntnis dessen lokaler Stabilität sagen, wie sich das System für kommende Zeiten verhalten wird. Beispielsweise könnte es sich für voranschreitende Zeit immer weiter der Systemvariablenkonfiguration des stationären Punktes (durch Strudlung) annähern. Der stationäre Punkt wäre dann ein punktförmiger Attraktor.

Neben der lokalen Stabilität sind Aussagen über die **zeitliche Stabilität** von benachbart startenden Trajektorien möglich. Diese geben Auskunft darüber, wie empfindlich ein System (eine Trajektorie) von seinen Anfangsbedingungen abhängt. Dazu werde für das AWP (2.1) eine Referenzlösung \vec{x}_r mit $\vec{x}_r(0) = \vec{x}_{r0}$ betrachtet. Existiert zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ derart, dass für jede Lösung $\vec{x}(t)$ von (2.6) mit der

Startbedingung $\|\vec{x}(t_0) - \vec{x}_r(t_0)\| < \delta$ folgt, dass $\|\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)\| < \epsilon$ für alle $t > t_0$ gilt, dann heißt $\vec{x}_r(t)$ **Lyapunov-stabil**. Andernfalls heißt $\vec{x}_r(t)$ Lyapunov-*instabil*. Kommen benachbart startende Bahnkurven der Referenzkurve für $t \rightarrow \infty$ *beliebig* nahe, gilt also zusätzlich zur Lyapunov-Stabilität $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{x}(t) - \vec{x}_r(t)\| = 0$, so heißt $\vec{x}(t)$ **asymptotisch stabil**. (Argyris et al., 2017, S. 54 ff.)

Für konkrete Stabilitätsberechnungen und für weitere Charakterisierungen von Stabilität (z. B. mittels der Lyapunov-Funktion) sei beispielsweise auf Argyris et al. 2017 verwiesen.

Attraktoren

Allgemein ist ein **Attraktor** A eine kompakte Menge mit den folgenden Eigenschaften: (a) A ist für alle Zeiten invariant unter der Wirkung des Phasenflusses. (b) A besitzt eine offene Umgebung (sog. **Einzugsbereich**), die sich unter dem Phasenfluss auf A zusammenzieht. (c) Es ist nicht möglich, A in zwei abgeschlossene, nichtüberlappende, invariante Mengen zu zerlegen. Zusammen impliziert dies, dass die Dimension eines Attraktors stets niedriger ist als die des Phasenraumes. (Argyris et al., 2017, S. 209)

Für zweidimensionale Phasenräume sind **Punktattraktor** und **Grenzyklus** die einzig möglichen Attraktoren. Sie existieren beispielsweise bei asymptotischer Stabilität und implizieren für Bewegungen in ihrem Einzugsbereich langfristig die Einnahme eines Gleichgewichtszustands bzw. einer periodischen Bewegung. In höherdimensionalen Phasenräumen existiert auch der **Torus-Attraktor**. Ihm entspricht eine quasiperiodische Bewegung, d. h. eine Bewegung, für die alle Projektionen auf zweidimensionale Phasenraumebenen periodische Bewegungen sind.² Diese drei Attraktortypen nennt man **einfache Attraktoren**, denn sie gehören zu klassischen Arten der Bewegung und sind Mannigfaltigkeiten. Eine graphische Veranschaulichung findet sich in Abbildung A.2.

Mithilfe des Attraktorbegriffs wird ein **dissipatives System** definiert: Ein dynamisches System heißt dissipativ, wenn sich für $t \rightarrow \infty$ ein beliebiges Teilvolumen des Phasenraums unter dem Phasenfluss auf einen Attraktor zusammenzieht. D. h. es existiert (mindestens) ein globaler Attraktor. Beispielsweise sind alle Systeme mit Energieverlust (z. B. durch Reibung) dissipativ. (Das Gegenteil von dissipativen Systemen sind konservative Systeme.) Für dissipative Systeme existiert ein weiterer, völlig andersartiger Attraktortyp: der sogenannte **seltsame Attraktor**. Er stellt keine Mannigfaltigkeit dar, sondern sieht aus wie ein „seltsames“ Gebilde mit unendlich feiner Struktur, und besitzt eine fraktale, nicht-ganzzahlige Dimension. Er wirkt i. A. auf eng nebeneinander liegende Punkte im Phasenraum sehr unterschiedlich. (Dies hat mit der in nichtlinearen Systemen auftreten-

²Klassisches Beispiel hierfür ist ein dreidimensionaler harmonischer Oszillator, bei dem die Federkonstanten in alle drei Raumrichtungen unterschiedlich groß sind.

den Faltung zu tun – siehe Kap. 2.4.) Ein typisches Beispiel ist der in Abbildung A.2 abgedruckte Lorenz-Attraktor. (Argyris et al., 2017, S. 209 f.)

In realen Systemen findet sich häufig eine **Koexistenz von Attraktoren**. Das meint die Existenz mehrerer Attraktoren im Phasenraum. Ihre Einzugsgebiete sind disjunkt, können aber eng beieinander liegen. Je nach Anfangsbedingungen einer Bewegung im Phasenraum wird ihre Trajektorie von einem anderen Attraktor eingefangen. Kleine Fluktuationen in den Anfangsbedingungen können dann dazu führen, dass die Trajektorie in einem anderen Einzugsgebiet startet und das System deshalb ein anderes Langzeitverhalten zeigt. Da für die Grenzen zwischen Attraktoren in dissipativen Systemen häufig fraktale Strukturen auftreten³, wird eine Vorhersage des Langzeitverhaltens aus den Startbedingungen unmöglich. Dies ist die Erklärung für das in der Einleitung beschriebene, unberechenbare Verhalten chaotischer, aber *dennoch* deterministischer Systeme.

Analog lässt sich **Bi- und Multistabilität** erklären: Wird ein System durch eine kleine Störung beeinflusst, kann seine Trajektorie dadurch in den Einzugsbereich eines sehr nahe liegenden, koexistierenden Attraktors verschoben werden (und bleibt dann durch diesen eingefangen).

Lage und Existenz von Attraktoren sind auch für sogenannte **Bifurkationen** entscheidend. Hängt ein dynamisches System (2.1) zusätzlich von einem Parameter ab, beeinflusst dieser die Gestalt des Phasenflusses. Jede Änderung der topologischen Struktur des Phasenportraits des dynamischen Systems bei kleiner Änderung des Parameters heißt Bifurkation. (Reitmann, 1996, S. 115) Beispielsweise kann bei einer Bifurkation ein ursprünglich stabiler Gleichgewichtszustand instabil werden, wofür zwei neue stabile Gleichgewichtszustände entstehen. Durch Variation des Parameters können sich also auch die Attraktoren des Systems grundlegend ändern. Bifurkationen eines Systems werden gerne in Bifurkationsdiagrammen dargestellt (s. Kap. 2.5) und können über ihre Verzweigungseigenschaften genauer klassifiziert werden. (Siehe hierzu bspw. Plaschko & Brod 1995, S. 71-111.)

2.4. Charakterisierung und Eigenschaften chaotischer Dynamik

Neben der Betrachtung des Stabilitätsverhaltens des Phasenflusses eines dynamischen Systems gibt es noch weitere quantitative Möglichkeiten, dessen Dynamik zu untersuchen und zu charakterisieren. Beispielsweise kann man die Bewegung des Systems⁴ einer **Fourier-**

³Das setzt voraus, dass es sich um seltsame Attraktoren handelt. Bei dissipativen Systemen ist das aufgrund ihrer Nichtlinearität in weiten Bereichen gegeben.

⁴Damit ist die Bewegung des Zustandsvariablen-tupels $\vec{x}(t)$ im Phasenraum unter dem Einfluss von \vec{f} gemeint.

Analyse unterziehen. Strebt das System langfristig einem Gleichgewichtszustand entgegen (Punktattraktor), ergibt die Fourier-Transformation genau einen Frequenz-Peak. Strebt es einer periodischen Bewegung entgegen (Grenzzyklus), ergeben sich äquidistante Peaks im Frequenzspektrum. Einer quasiperiodischen Bewegung (Torusattraktor) entspricht eine Frequenzerlegung mit Spitzen an den Stellen aller ganzzahligen Linearkombinationen der Grundfrequenzen. Das Fourier-Spektrum einer chaotischen Bewegung ähnelt dem des weißen Rauschens, eventuell sind einzelne charakteristische Peaks erkennbar.⁵ Diese Spektren werden auch **Leistungsspektrum** genannt. In der Praxis wird eine Fourier-Analyse häufig nicht analytisch, sondern numerisch anhand von Messdaten durchgeführt, da die Abbildungsvorschrift des dynamischen Systems unbekannt oder nicht explizit darstellbar ist.

Häufig wird eine Charakterisierung mittels der **Autokorrelationsfunktion** vorgenommen. Diese ist ein quantitatives Maß für die Korrelation, d. h. den Zusammenhang der einzelnen Systemzustände $\vec{x}(t)$ in Abhängigkeit ihres zeitlichen Abstands. Es ist offensichtlich, dass ein System in Gleichgewichtslage oder in (quasi)periodischer Bewegung entsprechend korrelierte Systemzustände aufweist. Hintergrundrauschen weist keine Korrelation auf. Bei chaotischer Dynamik geht die Korrelation zwischen einzelnen Zuständen erst auf längere Sicht verloren⁶, besitzt daher einen von Null verschiedenen, endlichen Wert. Eine Fourier-Analyse der Autokorrelationsfunktion ist proportional zum Leistungsspektrum des Systems. Eine Skizze des Leistungsspektrums und der Autokorrelationsfunktion für die vier verschiedenen Attraktortypen findet sich im Anhang A.2.

(Plaschko & Brod, 1995, S. 201-205; s. auch für tiefergehende Informationen hierzu)

Charakteristisch für chaotisches Verhalten ist, wie schon oft erwähnt, die starke Abhängigkeit von Anfangsbedingungen, d. h. dass sich anfangs eng beieinander liegende Trajektorien im Phasenraum zunehmend weiter voneinander entfernen. Tatsächlich geschieht dies exponentiell in der Zeit. Dies kann mithilfe des sogenannten **Lyapunov-Exponenten** quantifiziert werden, der gleichzeitig ein weiteres Kriterium zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens und zur Identifizierung von Attraktoren eines dynamischen Systems darstellt. (Details siehe bspw. in Argyris et al. 2017, S. 214-254.)

Daraus ergibt sich ein scheinbarer Widerspruch: Während sich bei chaotischer Bewegung zwei Trajektorien mit der Zeit exponentiell voneinander entfernen, sind sie zugleich im beschränkten (präziser: endlich großen) Einzugsbereich eines seltsamen Attraktors gefangen. Noch dazu zieht sich das Phasenraumvolumen aufgrund des dissipativen Systemcharakters immer weiter zusammen. (s. Kap. 2.3) Möglich ist dies – ohne einen Widerspruch darzu-

⁵Um chaotisches Verhalten zu identifizieren, ist die Untersuchung mittels Fourier-Analyse daher wenig nützlich. Hier hilft die Autokorrelationsfunktion (s. u.).

⁶Siehe hierzu bspw. die Ausführungen zu Rückkopplungen und Gedächtnisparametern in Kap. 3.2.3.

stellen – durch die in chaotischen Systemen auftretende **Faltung** des Bewegungsprozesses der Trajektorien. Grob vereinfacht kann man sich diese Abläufe wie die beim Herstellen von Blätterteig vorstellen: Ein Teig (die Trajektorien) wird durch Ausrollen räumlich ausgedehnt, und dann durch Umfalten übereinander gelegt. Wiederholt man dies oft genug, finden sich anfangs weit entfernte Punkte des Teiges durch das Übereinanderlegen teils eng beieinander, andererseits können anfangs nahe beieinander liegende Punkte voneinander weit entfernt worden sein. Durch die Faltung entsteht eine **selbstähnliche, fraktale Struktur** im Phasenraum: Bei geeigneter Vergrößerung eines Phasenportraits entsteht wieder das exakt selbe Bild.

Und noch eine weitere Implikation ergibt sich aus den Faltungsprozessen chaotischer Dynamik: Seltsame Attraktoren müssen eine fraktale Struktur haben. Denn durch das Zusammenziehen des Phasenraumvolumens auf das Attraktorvolumen im Laufe der Zeit nähern sich alle Trajektorien immer weiter ihrem Attraktor an. Gleichzeitig unterliegen sie aber der Faltung. Im Grenzfall $t \rightarrow \infty$ liegen Trajektorien und Attraktor unendlich nah beieinander. Die Gesamtheit der Bahnkurven stellt ein Fraktal dar, und damit also auch ihr Attraktor.

Aus dieser zunächst nicht ganz leicht vorzustellenden fraktalen Beschaffenheit folgt übrigens auch die häufig angeführte Tatsache, dass Trajektorien chaotischer Dynamik *jedem* Punkt ihres chaotischen Attraktors beliebig nahe kommen.

2.5. Möglichkeiten zur Darstellung chaotischer Systeme

Stellt man für ein AWP eines dynamischen Systems (2.1) die erhaltene Trajektorie im Phasenraum dar (s. Kap. 2.2), erhält man ein **Phasen(raum)diagramm**. Dieses enthält *alle* Informationen der Bewegung des Systems. Häufig sind jedoch nicht alle Systemvariablen bekannt oder messbar. Trägt man die verbleibenden $n - a$ Variablen in einem Diagramm auf, erhält man eine $(n-a)$ -dimensionale Projektion des eigentlichen Phasendiagramms. Diese ist i. A. mit entsprechendem Informationsverlust verbunden und kann unübersichtlich werden.

Genügt eine Reduzierung um genau eine Dimension⁷, kann man das System im **Poincaré-Schnitt** darstellen: Dazu wird im n -dimensionalen Phasenraum eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche so gewählt, dass die abzubildende Trajektorie die Hyperfläche überall senkrecht schneidet. (Als Beispiel s. Abb. 2.1.) Da in der Bahnkurve die Zeit als Parameter enthalten ist, kann man die einzelnen Schnittpunkte $P^{(i)}$ in eine (zeitlich aufsteigende) Reihenfolge bringen, und den Schnitt damit als nichtlineare, iterative, diskrete Abbildung

⁷Gerade eine Reduktion von vier auf drei oder von drei auf zwei Dimensionen kann sehr nützlich sein, um einen Zusammenhang graphisch als 3D-Simulation oder 2D-Abbildung untersuchen zu können.

$h: \Sigma \rightarrow \Sigma$ der Hyperfläche in sich selbst auffassen (Poincaré-Abbildung). Damit ist jeder Schnittpunkt $P^{(i+1)}$ Bild seines Vorgängers, d. h. es gilt $P^{(i+1)} = h(P^{(i)})$. Trägt man jeden Punkt über seinem Vorgänger auf, erhält man eine sogenannte **Return-Map**. In der Regel scheint durch einen Poincaré-Schnitt keine Information über das Langzeitverhalten der Trajektorien verloren zu gehen. (Argyris et al., 2017, S. 62 ff.)

Liegt ein diskretes System vor, können für eine Return-Map auch direkt die aufeinander folgenden Messwerte über ihrem jeweiligen Vorgänger aufgetragen werden.

Eine vom Phasenraum losgelöste Darstellungsform ist das sogenannte **Bifurkationsdiagramm**. Dieses bietet sich bei parameterabhängigen Systemen an. Hierzu kann die Poincaré-Abbildung auf eine Dimension projiziert und über den Parametern des Systems aufgetragen werden. Alternativ werden Projektionen der asymptotisch erreichten Systemzustände, d. h. der Häufungspunkte des Systems bzw. der Attraktoren, oder geeignete Unterräume des Phasenraums über den Parametern aufgetragen. Die Parameter, von denen das System abhängt, nennt man auch **Kontrollparameter**, da über sie die Einwirkungen der Umgebung auf das System kontrolliert werden.

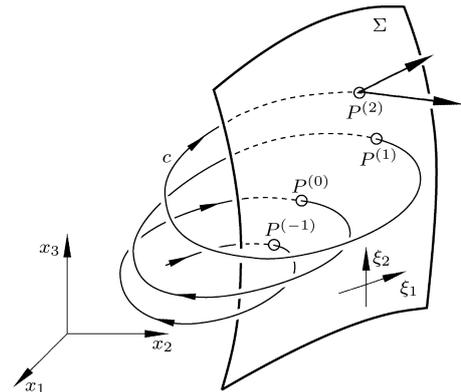


Abbildung 2.1: Skizze eines Poincaré-Schnitts [entnommen aus Argyris et al. 2017, S. 63]

2.6. Wege ins Chaos

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, wie ein System, das sich anfangs regulär verhält, in chaotisches Verhalten übergehen kann. Die Steuerung eines Systems in das Chaos hinein geschieht durch geeignete Änderungen an dessen Kontrollparametern. Nach aktuellem Forschungsstand lassen sich die Übergangsarten in drei Grundtypen einteilen: die Feigenbaum-Route, Übergang von Quasiperiodizität zu Chaos und Intermittenz. Nachfolgend werden ihre jeweiligen Merkmale kurz beschrieben. Für eine vertiefte Betrachtung diverser Unterarten sei auf Argyris et al. 2017, S. 493-616 verwiesen.

Allen Wegen ins Chaos ist gemeinsam, dass aus dem punktförmigen Attraktor bei regulärem Verhalten in einem ersten Schritt über eine Hopf-Bifurkation ein Grenzzyklus wird. Dies ist in Abbildung 2.2 veranschaulicht.

Im Falle der **Feigenbaum-Route** bzw. **Periodenverdoppelungskaskade** findet zunächst eine weitere Hopf-Bifurkation statt, sodass ein zweidimensionaler Torusattraktor entsteht. Dadurch gerät das System in quasiperiodische Bewegung. Die beiden Grundfre-

quenzen dieser Bewegung, die anfangs in irrationalem Verhältnis stehen, synchronisieren sich, es entsteht eine periodische Bewegung der Umlaufdauer T . Durch weitere Veränderungen in den Kontrollparametern kommt es dann immer wieder (unendlich oft) zu Periodenverdoppelungen $2T \rightarrow 4T \rightarrow 8T \rightarrow \dots$, bis schließlich der Zyklus mit (beinahe) unendlicher Periode seine Stabilität verliert und zum seltsamen Attraktor wird. Damit ist chaotisches Verhalten erreicht. Wird genau ein Kontrollparameter variiert, dessen Werte an den Stellen, an denen gerade Periodenverdoppelungen auftreten, mit r_1, r_2, \dots bezeichnet werden, so gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+2} - r_{k+1}} = \delta = 4,66692\dots \quad (2.7)$$

Die in (2.7) betrachtete Folge konvergiert schnell und strebt gegen den, vom konkreten System und von der Art des Kontrollparameters unabhängigen, Wert δ . Diese Konstante wird **Feigenbaum-Konstante** genannt. (Argyris et al., 2017, S. 540-559)

Im Gegensatz zur Feigenbaum-Route muss es nach einer zweiten Hopf-Bifurkation aber nicht zwingend zur Synchronisation beider Grundfrequenzen kommen. Denn auch ein direkter **Übergang von Quasiperiodizität ins Chaos** ist möglich. Gemäß des Ruelle-Takens-Szenarios durchläuft bei weiterer Kontrollparameter-Variation der zweidimensionale Torus eine erneute Hopf-Bifurkation und wird zu einem dreidimensionalen Torus. Das entspricht einer quasiperiodischen Bewegung im Phasenraum mit drei Grundfrequenzen in irrationalem Verhältnis zueinander. Durch kleine Störungen ist es möglich, dass die Bewegung an Stabilität verliert und in chaotisches Verhalten übergeht. Gemäß des Landau-Szenarios kann es nach Erreichen des 3D-Torus auch zu einer Kaskade unendlich vieler Hopf-Bifurkationen kommen. Dabei entstehen n -dimensionale Tori. Für $n \rightarrow \infty$ gelangt das System schließlich ins Chaos. (Argyris et al., 2017, S. 493-507)

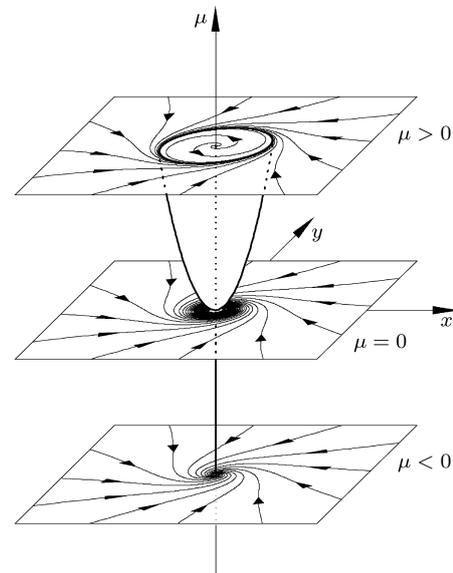


Abbildung 2.2: Darstellung einer Hopf-Bifurkation im Phasenraum [entnommen aus Argyris et al. 2017, S. 325]

Im Falle der **Intermittenz** zeigt ein System zunächst reguläres Verhalten, das anfangs nur selten und kurz von irregulären Abschnitten (deutlich größerer Amplitude) unterbrochen wird (sog. burst of chaos). Bei weiter erfolgreicher Änderung der Kontrollparameter werden diese Ausbrüche häufiger, bis sie schließlich zur Regel werden. Intermittenz stellt also eine Klasse kontinuierlicher Übergangsformen von regulärem zu chaotischem Verhalten dar. Im Detail sind viele unterschiedliche Intermittenztypen bekannt. (Argyris et al.,

2017, S. 582 f.)

Eine graphische Veranschaulichung dieser drei Übergangsarten findet sich in der Abbildung A.3 im Anhang A.1.

Darüber hinaus kann es auch innerhalb von chaotischen Regimen zu strukturellen Veränderungen der chaotischen Dynamik kommen: So sind bei Variation der Kontrollparameter kontinuierliche wie plötzliche Veränderungen in der Chaotizität eines seltsamen Attraktors beobachtbar.⁸ Eine plötzliche Veränderung eines Attraktors nennt man auch **Attraktorkrise**. Dabei kann sich beispielsweise dessen räumliche Gestalt grundlegend ändern (**interior crisis**), oder er verschwindet ganz (**boundary crisis**), wodurch das System in den Einzugsbereich eines anderen, koexistierenden oder eines neu entstandenen Attraktors gerät. (Argyris et al., 2017, S. 440 f.)

⁸Dies ist beispielsweise mittels der in Kapitel 2.4 eingeführten Lyapunov-Exponenten quantifizierbar.

3. Stand der Forschung zum System „tropfender Wasserhahn“

Dass ein tropfender Wasserhahn ein nichtlineares System darstellt, das unter gewissen Umständen chaotisches Verhalten zeigen kann, wurde erstmals 1977 von O. Rössler in der Theorie vorgeschlagen (Haken, 1977, S. 174-189). Seit Mitte der 1980er Jahre und vor allem in den 1990ern haben einige Forschungsgruppen dieses System unter Laborbedingungen aufgebaut und mithilfe zunehmend ausreichend leistungsfähiger digitaler Messwerterfassungen experimentell untersucht. Nach der Jahrtausendwende ist das Interesse am tropfenden Wasserhahn zurückgegangen, und es scheint kaum neue Veröffentlichungen hierzu gegeben zu haben. Nachfolgend werden die wichtigsten publizierten Erkenntnisse über den chaotisch tropfenden Wasserhahn dargestellt.

3.1. Theoretische Modellierung des Systems

Das Verhalten des Systems wird durch den Vorgang der Tropfenbildung und dessen Ablösung an der Austropfspitze bestimmt. Buttkus et al. 1995, S. 2 zufolge beschreibt das sich wiederholende Heranwachsen eines Tropfens bis zu einer gewissen Masse mit der darauffolgenden Ablösung eine Schwingung.⁹ Dabei bleibt stets ein Resttropfen an der Spitze zurück. Dieser zieht sich meist¹⁰ aufgrund chemischer Bindungskräfte in die Spitzenöffnung zurück, bevor es zu einer erneuten Tropfenbildung kommt. Auch dieser Vorgang stellt eine gedämpfte Schwingung dar. Im Kern sollte das System also mit zwei gekoppelten Schwingungen und einer Tropfen-Ablösebedingung modelliert werden können.

Eine vollständige Modellierung des Systems erscheint zu kompliziert und findet sich nicht in der Literatur. Häufig allerdings werden einige Spezialfälle und Teilmodelle behandelt, die das beobachtbare Tropfverhalten in gewissen Parameterbereichen recht gut beschreiben und Hinweise auf tatsächlich auftretende Phänomene liefern. Eine theoretische Betrachtung des Systems scheint in jedem Fall sinnvoll, beispielsweise damit im Experiment nach theoretisch vorhergesagten Phänomenen Ausschau gehalten werden kann.

⁹Für manche Fließgeschwindigkeiten kann bereits mit bloßem Auge ein Oszillieren der heranwachsenden Tropfen beobachtet werden.

¹⁰Es können sich auch sogenannte Satellitentropfen bilden, siehe Kapitel 3.2.1.

Shaw 1984, S. 14 f. hat als erstes ein System von Differentialgleichungen (DGLs) zur Modellierung des Tropfvorgangs vorgeschlagen. Es basiert auf einem Masse-Feder-Modell: Der sich bildende Tropfen stellt eine Masse $m(t)$ an einer Feder mit Federkonstante k dar. Die Feder steht für die Oberflächenkräfte bzw. chemischen Kräfte des Wassers. Sobald die Feder eine kritische Länge erreicht, d. h. sobald der Schwerpunkt x der Masse den kritischen Punkt x_0 erreicht, wird schlagartig ein Stück Masse Δm entfernt. Diese sei proportional zur Schwerpunktschwindigkeit der Masse am kritischen Punkt und beschreibt den sich lösenden Wassertropfen.

$$\begin{cases} (a) & mg - kx \approx m\ddot{x} \\ (b) & \dot{m} = \text{const.} \\ (c) & \Delta m \propto \dot{x} \text{ bei } x = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Hierbei handelt es sich aufgrund der Unstetigkeit in der Masse¹¹ um ein nichtlineares System von DGLs. Als Phasenraumvariablen dienen Position, Geschwindigkeit und Masse. Gleichung (b) geht davon aus, dass sich die Fließgeschwindigkeit nur sehr langsam ändert und deshalb lokal als konstant angenommen werden kann. Aufgrund der Diskontinuität in der Masse (aufgrund des Ablösens der Tropfen) kann eine Lösung des Systems (3.1) nicht in analytische Form gebracht werden. (Austin, 1991, S. 150)

Durch Implementierung auf einem analogen Computer (kommt einer modernen numerischen Integration gleich) und Vergleich mit experimentell erhobenen Daten zeigt Shaw, dass das System (3.1) (zumindest in manchen Parameterbereichen) ein geeignetes Modell darstellt. Siehe hierzu Abbildung 3.1. Besonders hervorzuheben an diesem Modell

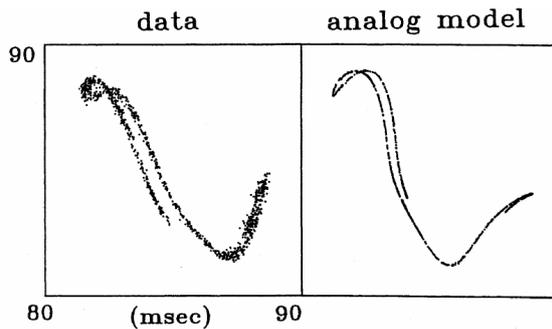


Abbildung 3.1: Vergleich von experimentell ermittelter und aus (3.1) berechneter Return-Map¹² für übereinstimmende Systemparameter [entnommen aus Shaw 1984, S. 16]

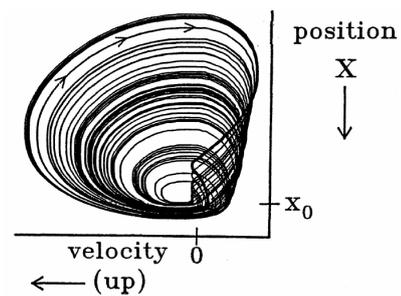


Abbildung 3.2: aus (3.1) berechnetes Phasenraumportrait für die gleichen Parameter wie in Abb. 3.1 [entnommen aus Shaw 1984, S. 17]

¹¹Da Differenzierbarkeit Stetigkeit voraussetzt, gilt Gleichung (b) jeweils nur für die Zeitbereiche, in denen ein Tropfen heranwächst.

¹²siehe Kapitel 2.5

ist, dass es mit endlich vielen (drei, um genau zu sein) Variablen ein eigentlich unendlich-dimensionales Fluidsystem (innerhalb gewisser Grenzen) beschreiben kann.¹³ Für die gleichen Parameter wie in Abbildung 3.1 findet sich ein aus System (3.1) berechnetes Phasenraumportrait in Abbildung 3.2. Das schnelle Zurückziehen des verbleibenden Resttropfens nach der Tropfenablösung bei x_0 ist gut zu erkennen. (Shaw, 1984, S. 15-18) Ein noch tiefergehender Vergleich zwischen Modell und experimentellen Daten bleibt bei Shaw 1984 jedoch aus.

Austin 1991, S. 150 führt folgenden Satz an Differentialgleichungen zur Beschreibung des Tropfvorgangs an:

$$\begin{cases} (a) & mg - kx \approx m\ddot{x} \\ (b) & \dot{m} = \text{const.} \\ (c) & \Delta m = \dot{x} \text{ bei } x = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Hierbei seien die Variablen und Parameter genauso wie in System (3.1) benannt. Im Unterschied zu diesem findet sich in Gleichung (c) eine Gleichheit.

Auf Grundlage dieses Modells entwickelt Austin „by making some educated guesses about the approximate form of such a solution“ eine Lösungsfunktion $x(t)$. Dazu wird *zusätzlich* angenommen, dass jeder Tropfen mit einer Frequenz oszilliert, die als Funktion abhängig von der Tropfengröße ist. So ergibt sich:

$$x(t) = At^{1/3} + B \sin[\omega(t)t + \Omega_i] e^{-\gamma t}. \quad (3.3)$$

Der exponentielle Term berücksichtigt die Dämpfung aufgrund von Reibung, der Sinusterm die Oszillationen bei der Tropfenformung. Ω_i steht für den Phasenwinkel der Oszillation zu Beginn der Tropfenformung. $\omega(t)$ konnte experimentell zu $\omega(t) = \tilde{\omega}t^{-1/3}$

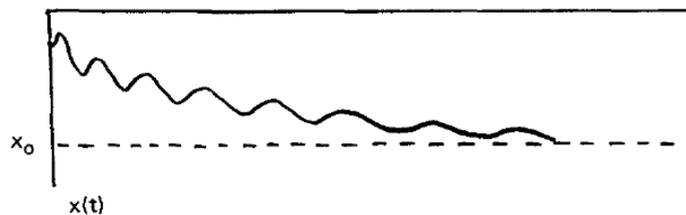


Abbildung 3.3: Tropfenposition in Abhängigkeit von der Zeit gemäß Gleichung (3.3) [entnommen aus Austin 1991, S. 150]

bestimmt werden, wobei $\tilde{\omega}$ ein fester Parameter ist. A , B und γ sind ebenfalls Parameter. Damit läuft die Bildung eines Tropfens qualitativ wie in Abbildung 3.3 skizziert ab.

Weiterhin ist in Formel (3.3) ein weiterer wichtiger Aspekt des Systems „tropfender Wasserhahn“ enthalten: der **Gedächtnisparameter** Ω_i . Dieser bewirkt eine systeminterne Feedbackschleife, woraus im Allgemeinen in nichtlinearen Systemen komplexes Verhalten entstehen kann. Im Falle des tropfenden Wasserhahns wird durch ihn eine Information

¹³Dies wird in der Literatur auch an anderen Stellen gefunden, siehe die Referenzen bei Shaw 1984, S. 18 für weitere Details hierzu.

des zurückliegenden Tropfens zum nächsten Tropfen weitergegeben: der Phasenwinkel, mit dem eine neue Tropfenbildung startet. Er *kann* vom Wert des Phasenwinkels beim Ablösen des letzten Tropfens abhängen. Das impliziert verschiedene Phänomene.

Für das Modell (3.2) mit Lösung (3.3) kann man mithilfe des Gedächtnisparameters beispielsweise das Auftreten einer Serie von sich abwechselnden Einer- und Zweier-Zyklen bei niedrigen Fließgeschwindigkeiten theoretisch herleiten. Dazu wurde die Abhängigkeit des Phasenwinkels Ω_f bei Ablösen eines Tropfens vom Phasenwinkel Ω_i zu Beginn der Tropfenbildung dieses Tropfens in Austin 1991, S. 151 bestimmt und ist Abbildung 3.5 zu entnehmen. Unter der Annahme niedriger Fließgeschwindigkeiten (etwa 1 - 4 Tropfen pro Sekunde) kann weiterhin ein funktionaler Zusammenhang zwischen dem Phasenwinkel bei

Ablösen des letzten Tropfens und dem Winkel zu Beginn des darauffolgenden Tropfens bestimmt werden. Somit lässt sich, bei gegebenem Startwinkel Ψ , der Winkel beim Ablösen des n -ten Tropfens als n -faches Anwenden einer Funktion f auf Ψ berechnen; eine Tropfserie also als $f^n(\Psi)$. Wenn nun die Unstetigkeitsstelle Ω_{dis} von f für eine gewisse Fließgeschwindigkeit *nicht* im Bild von f liegt, hat f einen Fixpunkt (siehe Abb. 3.6). $f^n(\Psi)$ stellt also eine Fixpunktiteration dar, und es tropft mit konstanter Periode. Das System besitzt folglich einen stabilen einperiodischen Attraktor. Liegt die Unstetigkeitsstelle jedoch *im* Bild von f , dann alterniert f unter Iteration langfristig zwischen zwei Werten (siehe Abb. 3.7). Der Attraktor des Systems liegt für diese Bereiche also (geringfügig) doppelt aufgespalten vor.

Experimentell sind solche Serien ebenfalls gefunden worden, siehe Abbildung 3.4.

Bei sehr niedrigen Fließgeschwindigkeiten (< 1 Tropfen pro Sekunde) gehen durch den Dämpfungsterm in Gleichung (3.3) sämtliche Phaseninformationen zwischen zwei Tropfen verloren. Dann besteht qualitativ ein streng monotoner Zusammenhang zwischen Fließgeschwindigkeit und Tropfabstand. Für hohe Fließgeschwindigkeiten lässt sich zeigen, dass deutlich komplizierteres und chaotisches Verhalten zu erwarten ist. (Austin, 1991, S. 153) Beides stimmt mit experimentellen Beobachtungen überein.

Sehr komplexes Systemverhalten kann auch durch Vorhandensein mehrerer Gedächtnisparameter – einem sogenannten mehrdimensionalen Feedback – zustande kommen. Gleichung (3.2(c)) besagt, dass die Masse eines sich ablösenden Tropfens von der Ge-

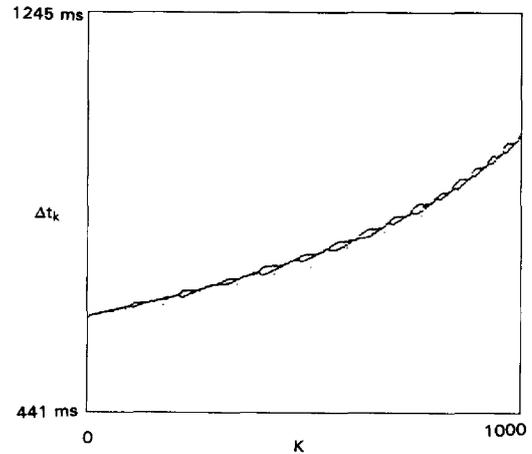


Abbildung 3.4: Serie bistabiler Bereiche bei niedriger Durchflussmenge (1 bis 3,5 Tropfen/s) [entnommen aus Austin 1991, S. 149]

Alle Achsen in Abb. 3.5 - 3.7 sind von 0 bis 2π skaliert. Die Unstetigkeitsstelle heiße Ω_{dis} .

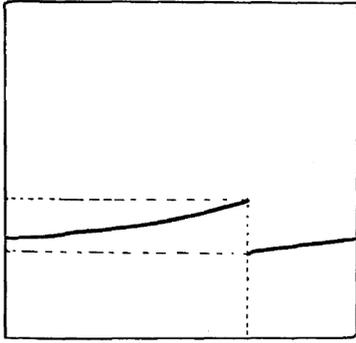


Abbildung 3.5: Ω_f über Ω_i bei einer festen Fließgeschwindigkeit und für denselben Tropfen [entnommen aus Austin 1991, S. 151]

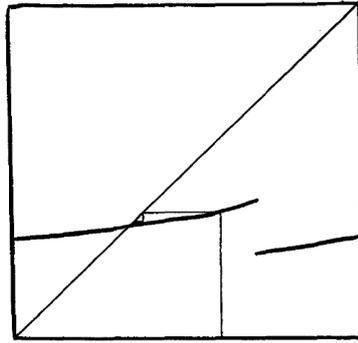


Abbildung 3.6: Verhalten von f unter Iteration für $\Omega_{dis} \notin \text{Im}(f)$ [entnommen aus Austin 1991, S. 153]

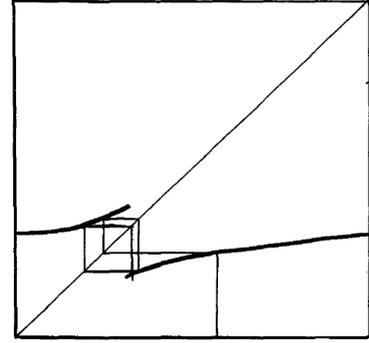


Abbildung 3.7: Verhalten von f unter Iteration für $\Omega_{dis} \in \text{Im}(f)$ [entnommen aus Austin 1991, S. 153]

schwindigkeit dessen Schwerpunkts abhängt. Die Geschwindigkeit wiederum ist mit den oben diskutierten Schwingungen im System gekoppelt. Ein Unterschied in der Masse, die sich ablöst, bewirkt auch einen Unterschied in der Restmasse, die an der Spitze übrig bleibt. Dies verursacht bei zunehmend höheren Fließgeschwindigkeiten umso stärkere (nichtlineare) Feedbackeffekte. (Austin, 1991, S. 153)

Eine detailliertere Berechnung der Menge an im System zwischengespeicherten Informationen findet sich beispielsweise in Martien et al. 1985, S. 403 f..

Kiyono & Fuchikami 1999 liefern auf Basis einer vorangegangenen Veröffentlichung über Eigenschaften und Modellierung des Tropfvorgangs (siehe Kapitel 3.2.1) ein deutlich detaillierteres Modell. Im Grundsatz basiert es ebenfalls auf einem Masse-Feder-Modell. Da der tropfende Wasserhahn häufig mit nicht allzu kleinen Austropfspitzen realisiert wird, scheint diese Grundidee gerechtfertigt, denn „the mass-spring model corresponds to relatively large faucets [Anm.: für Spitzendurchmesser größer als etwa 0,5 mm], where the oscillation of the center of mass governs the basic dynamics“. (Fuchikami et al., 1999) Grundlegend neu im Vergleich zu vorigen Modellen sind zwei Dinge: Einerseits wurde versucht, die Modellparameter (z. B. Federkonstante, Dämpfung) bzw. genauer gesagt deren funktionale Abhängigkeiten in separaten Fluiddynamiksimulationen sehr präzise zu bestimmen. (Insbesondere die funktionalen Zusammenhänge wurden in anderen Modellen häufig nicht untersucht.) Andererseits wird die Art und Weise, wie sich die Wassertropfen an der Spitze bilden, welche Formen sie annehmen und wie (u. a. abhängig von der Form und der Masse) der Ablöseprozess abläuft, als Schlüsselement für eine gute Modellbildung für dieses System gesehen. Für beide Aspekte wird auf die Ergebnisse einer

vorigen Veröffentlichung¹⁴ zurückgegriffen. In dieser werden ein neu entwickelter Algorithmus zur Simulation der Tropfenbildung an einer Spitze auf Basis von Lagrange'schen Fluidodynamikgleichungen und dessen Ergebnisse vorgestellt.¹⁵

Nachfolgendes System an (Differential-)Gleichungen gelte für recht niedrige Fließgeschwindigkeiten (weniger als 6 Tropfen pro Sekunde):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -kx - \gamma\dot{x} + mg \\ \text{(b)} \quad \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} + (\dot{x} - v_0)\dot{m} \\ \text{(c)} \quad \dot{m} = \tilde{Q} = \text{const.} \\ \text{(d)} \quad \tilde{Q} = \pi r^2 v_0 \\ \text{(e)} \quad k(m) = \begin{cases} a_1 m + a_2 & (m < m_{crit}) \\ 0 & (m \geq m_{crit}) \end{cases} \\ \text{(f)} \quad m_r = b_1 m + b_2 \text{ bei } x = x_{crit} \\ \text{(g)} \quad \left. \begin{array}{l} x = x_0 = \text{const.} \\ \dot{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ bei } x = x_{crit} \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Gleichungen (a) und (b) beschreiben die Bewegungsabläufe des gedachten Masse-Feder-Pendels. g sei der Ortsfaktor, γ eine Dämpfungskonstante (siehe auch Gleichung (3.3)). Dabei beschreibt (b) die Impulsänderung des Tropfens bei stetigem Anhaften weiterer Masse (mit relativer Geschwindigkeit $\dot{x} - v_0$). Das Anwachsen der Tropfenmasse geschieht nach (c) linear. Fließgeschwindigkeit v_0 an der Spitze mit Durchmesser r und Flussrate \tilde{Q} sind nach (d) proportional.¹⁶ Gleichung (e) trägt der Beobachtung Sorge, dass die Federkonstante bei Überschreiten einer kritischen Masse m_{crit} schlagartig Null werden muss. Denn für niedrige Fließgeschwindigkeiten findet die Tropfenablösung durch „reguläres“ Einschnüren statt; regulär meint dabei, dass die Einschnürung erst mit Erreichen der kritischen Masse beginnt, und nicht davor (s. auch Kap. 3.2.1). Der ansonsten lineare Zusammenhang sowie passende Werte für die Konstanten a_1 und a_2 werden der oben erwähnten separaten Simulation entnommen. Die Ablösung des Tropfens findet bei x_{crit} statt. Der schon früher thematisierte Resttropfen m_r , der an der Spitze beim Ablösen verbleibt, wird in Gleichung (f) konkretisiert. Auch hier sind die Konstanten b_1 und b_2 durch Simulation bestimmt. Gleichung (g) beschreibt die (offensichtliche) Reset-Bedingung bei Tropfenablösung. (Kiyono & Fuchikami, 1999)

¹⁴siehe Fuchikami et al. 1999

¹⁵Im Kapitel 3.2.1 werden u. a. aus dieser Veröffentlichung einige Ergebnisse dargestellt.

¹⁶Deshalb und nach Gl. (5.1) sind Fließgeschwindigkeit v_0 , Flussrate \tilde{Q} und die später häufig verwendete Durchflussmenge Q (Volumen pro Zeit) direkt proportional zueinander. Insbesondere Durchflussmenge und Fließgeschwindigkeit werden in dieser Arbeit daher häufig synonym verwendet.

Vergleicht man die Ergebnisse aus numerischer Lösung des Systems 3.4 mit experimentell erhaltenen Daten, finden Kiyono & Fuchikami (freilich für niedrige Fließgeschwindigkeiten) quantitativ gute Übereinstimmungen. Dies spricht sowohl für die Konzeption des Modells, als auch für die aus oben erwähnter Simulation erhaltenen Parameter. Gleichzeitig liefert das Modell viele auch tatsächlich beobachtbare Phänomene wie die Art des Zusammenhangs zwischen Durchflussmenge und Tropfabstand, Bifurkationen, Übergangsverhalten zwischen periodischen und chaotischen Regimen und Hysterese. (Kiyono & Fuchikami, 1999) Hierauf wird im folgenden Kapitel noch etwas genauer eingegangen.

3.2. Experimentelle Befunde und deren theoretische Hintergründe

Mit den auf den letzten Seiten vorgestellten, zunehmend komplizierteren Modellen gelingt es, viele Beobachtungen aus dem Experiment nachzubilden und Hinweise auf weitere entdeckbare Phänomene zu liefern. Dennoch besitzen alle Modelle einen kleinen Gültigkeitsbereich. Insbesondere existiert kein quantitatives Modell für mittlere und hohe Fließgeschwindigkeiten. In vielen Veröffentlichungen wird das stark komplexe Systemverhalten für diese Kontrollparameterbereiche betont, dessen Hintergründe bis heute nicht wesentlich erforscht sind. Allerdings ist der tropfende Wasserhahn bereits vielen experimentellen Untersuchungen unterzogen worden, woraus sich eine Fülle an dokumentierten Phänomenen dieses nichtlinearen Systems ergeben hat. Nachfolgend werden die Wichtigsten vorgestellt und – sofern bekannt – mit einer knappen theoretischen Erklärung versehen.

3.2.1. Eigenschaften der Tropfenbildung

Zentral für die Dynamik des Systems „tropfender Wasserhahn“ und dessen Verständnis sind die Eigenschaften der Tropfenbildung und -ablösung. Intuitiv könnte man meinen, dass bei konstanter, kontinuierlicher Durchflussmenge Form und Volumen der sich lösenden Wassertropfen stets gleich sind – zumindest in regulären Regimen des Systems. Dem ist aber nicht so. Experimentell hat man mehrfach gefunden, dass sich häufig sogenannte Satellitentropfen bilden. Damit werden (sehr) kleine Wassertropfen bezeichnet, die (sehr) rasch auf einen normal großen Wassertropfen folgen. Bei genauer Betrachtung der Art und Weise, wie sich Wassertropfen an einer Spitze formen und lösen, findet man sogenanntes **necking** vor. Das bedeutet, dass sich an der Öffnung ansammelnde Volumen hängt u. a. aufgrund der Schwerkraft immer weiter nach unten, wobei sich als Verbindung zwischen dem Großteil des Volumens und der Öffnung ein schmaler Hals ausbildet. Irgendwann schnürt sich aufgrund von Oberflächenkräften an der Oberkante des weit nach unten hän-

genden Wasservolumens der Hals so stark ein, dass sein Durchmesser beinahe Null wird und sich der Tropfen löst. Der übrig bleibende Resttropfen (der Hals) kann sich entweder kurz darauf auch ablösen (durch Einschnürung direkt unterhalb der Austropfspitze) oder sich aufgrund von chemischen Kräften zur Spitzenöffnung zurückziehen. Löst er sich, hat sich ein Satellitentropfen gebildet. Fotos von beiden Prozessen der Tropfenbildung finden sich in Abbildung 3.8.

Wann und wie genau Satellitentropfen auftreten, hängt von der Spitzegeometrie und von der Fließgeschwindigkeit ab. Aus verschiedenen Untersuchungen wird übereinstimmend berichtet, dass bei sehr niedrigen Fließgeschwindigkeiten das Ungleichverhältnis der Volumen von Tropfen und Satellitentropfen besonders stark ausgeprägt ist (Größenordnungen 10:1 bis 100:1). (S. z. B. Dreyer & Hickey 1991, S. 624 oder Fuchikami et al. 1999¹⁷.) Dieses wird für zunehmende Fließgeschwindigkeit geringer. In Abbildung A.4 im Anhang A.2 ist zum Vergleich eine Simulation der Tropfenbildung für hohe und niedrige Fließgeschwindigkeiten zu sehen, die diese Beobachtung verdeutlicht. Bei eher größeren Spitzendurchmessern (≈ 2 mm) scheint die Bildung von Satellitentropfen ab genügend hoher Durchflussmenge irgendwann abrupt und vollständig zu enden. Bei eher kleineren Durchmessern ($\approx 0,5$ mm) scheinen sich auch dann noch gelegentlich Satellitentropfen zu bilden. (Dreyer & Hickey, 1991)

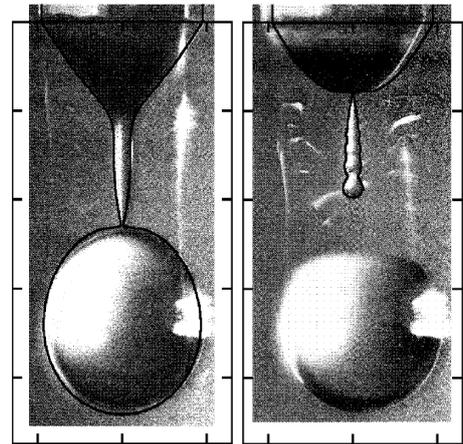


Abbildung 3.8: Tropfenbildung durch necking und Entstehen eines Satellitentropfens [entnommen aus Fuchikami et al. 1999]

Als eine Grundlage aller in Kapitel 3.1 vorgestellten Modelle dient die Annahme, dass das Wasser beim Tropfenbilden und Sich-zurückziehen oszilliert. Dies ist teils schon mit bloßem Auge beobachtbar und experimentell gut bestätigt. Dabei sind Oszillationen vor allem in chaotischen Regimen stark ausgeprägt. Interessanterweise führt dies laut Sartorelli et al. 1994, S. 3969 f. dazu, dass die Position, an der sich ein Tropfen löst, (zumindest bei chaotischem Systemverhalten) stets unterschiedlich ist. Eine Stroboskopaufnahme zur Verdeutlichung dieser Beobachtung findet sich in Abbildung A.5. Dies unterstreicht den begrenzten Gültigkeitsbereich der Modelle (3.1), (3.2) und (3.4) auf reguläre Regime, da dort stets Tropfenablösung an einer festen Position formuliert wurde.

Katsuyama & Nagata 1999 stellen auf Basis eigener Experimente fest, dass die Zeitab-

¹⁷In diesem Paper wird zwar eine Simulation der Wassertropfenbildung vorgestellt, allerdings basiert sie auf verschiedenen, referenzierten experimentellen Befunden. In diesen finden sich entsprechende experimentelle Berichte über das beschriebene Verhalten der Satellitentropfen-Bildung.

stände zwischen zwei Tropfen nicht nur davon abhängen, dass sich ein Tropfen aufgrund seines Eigengewichts irgendwann ablöst, sondern dass dabei auch die Oszillationen eine wichtige Rolle spielen.

Damit sind also mehrere Einflussfaktoren auf die messbaren Tropfabstände gefunden: Grundlegend natürlich die Durchflussmenge. In Verbindung mit dem Spitzendurchmesser bestimmt sie die Charakteristik der Satellitentropfenbildung, die sich durch kurze Zeitabstände bemerkbar macht. Weiterhin spielen Oszillationen bei der Tropfenbildung eine Rolle. Nicht zuletzt findet sich an vielen Stellen die Beobachtung, dass das durchschnittliche Tropfenvolumen kleiner ist, wenn der Spitzenradius geringer ist.

3.2.2. Systemdynamik, Übergangsverhalten und Attraktoren

In vielen Veröffentlichungen finden sich Messungen des Tropfabstands in Abhängigkeit von der Durchflussmenge; häufig für fixierte Werte oder nur kleine kontinuierliche Bereiche. Meist wird dabei die Systemdynamik in der Nähe von Bifurkationspunkten und dessen Übergangsverhalten betrachtet. Außerdem werden Attraktoren untersucht und klassifiziert. (Zu den theoretischen Hintergründen und Eigenschaften von Dynamik und Attraktoren nichtlinearer Systeme siehe Kapitel 2.)

Drei Beispiele für Tropfdiagramme (Tropfabstand aufgetragen über der Durchflussmenge), die für einen verhältnismäßig breiten Bereich an Durchflussmengen erstellt wurden, sind in den Abbildungen A.6, A.7 und A.8 im Anhang A.2 zu sehen. Übereinstimmend findet sich in der Literatur, dass sich der tropfende Wasserhahn für sehr hohe und sehr niedrige Fließgeschwindigkeiten regulär und periodisch (Einer-Zyklus) verhält. Dazwischen liegen sich immer wieder abwechselnde Bereiche regulären Verhaltens (die aber teils höhere Periodizität aufweisen, also 2er-, 3er-, 4er-, 8er-Perioden usw.) sowie Bereiche chaotischen Verhaltens.

Die überwiegend chaotischen Zonen erstrecken sich in der Regel über breite Bereiche an Fließgeschwindigkeiten. Typische Wege ins Chaos (s. Kap. 2.6) sind Intermittenz und Periodenverdopplungen sowie eine Mischung aus beiden. Ein Beispiel ist in Abbildung 3.9 zu sehen: hier geht ein 3er-Zyklus über Intermittenz ins Chaos über. Für Intermittenz werden viele verschiedene Typen beschrieben.

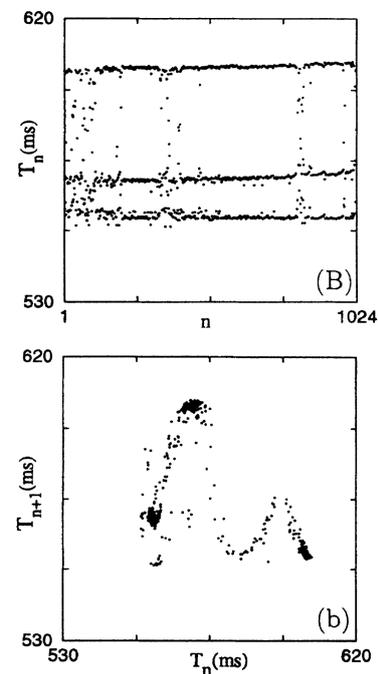


Abbildung 3.9: Übergang von einem 3er-Zyklus ins Chaos durch Intermittenz [entnommen aus Sartorelli et al. 1994, S. 3970]

(Dreyer & Hickey, 1991; Sartorelli et al., 1994; Sánchez-Ortiz & Salas-Brito, 1995). Allein Buttkus et al. 1995 beschreiben davon abweichend einen sehr schmalen chaotischen Bereich, in den und aus dem eine reine Feigenbaum-Route führt. (s. Abb. A.9) Intermitenz scheint nicht aufgetreten zu sein. Dies steht in starkem Kontrast zu allen anderen gefundenen Veröffentlichungen, und bedarf einer weiterführenden Analyse.

Generell können verschiedenartig periodische sowie seltsame Attraktoren studiert werden. Für die einer chaotischen Dynamik zugrunde liegenden seltsamen Attraktoren sind verschiedenste Formen und teils sehr spezielle Eigenschaften berichtet. Entsprechend viele Return-Maps finden sich. Genauso geben stroboskopartige Bilderserien von Übergängen periodischer in seltsame Attraktoren interessante Einblicke (s. z. B. Sartorelli et al. 1994). Beispielsweise lässt sich in der Return-Map unten in Abbildung 3.9 gut erahnen, wie ein regulärer 3er-Attraktor in einen seltsamen Attraktor übergehen kann. Auch verschiedene Formen von Attraktorkrisen (s. Kap. 2.6) lassen sich beobachten.

Weiterhin berichten mehrere Forschungsgruppen von sich in regelmäßigen Abständen (bezüglich der Fließgeschwindigkeit) wiederholenden Mustern im Tropfdiagramm.

Beispielsweise bei Austin 1991 handelt es sich dabei um eine Serie bistabiler Regionen (thematisiert in Kap. 3.1), bei Katsuyama & Nagata 1999 um eine Serie von Bereichen, in denen sich periodisches und chaotisches Verhalten mit immer gleichen Übergängen abwechseln. Solche Serien werden auch **unit structure** genannt. Eine Darstellung letzterer findet sich in Abbildung 3.10.¹⁸ Das Auftreten von unit structures ist ein Folge aus den oben schon häufiger diskutierten Oszillationen des sich formenden Tropfens in Verbindung mit dem necking-Prozess beim Ablösen des Tropfens. Für jede Einheit der Struktur ist dabei die Anzahl der Oszillationen zwischen Beginn der Tropfenformung und dessen Ablösung charakteristisch. Detailliertere Erklärungen hierzu finden sich bei Kiyono & Fuchikami 1999.

Insgesamt lässt sich allerdings festhalten, dass die am System „tropfender Wasserhahn“ beobachtbare Dynamik offenbar stark von den jeweiligen Systemeigenschaften (verwendete Spitze (Symmetrie, Öffnungsweite), Tempera-

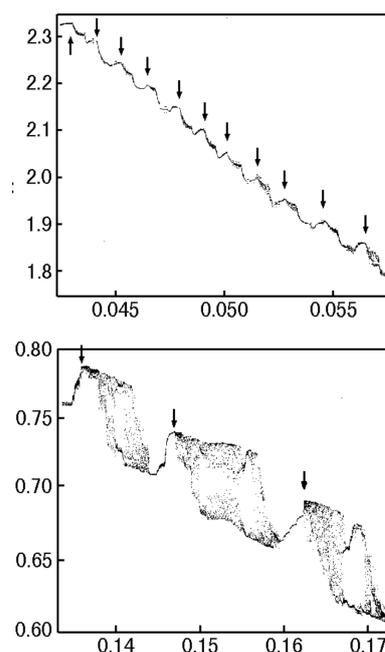


Abbildung 3.10: unit structure für zwei verschiedene Fließgeschwindigkeitsbereiche [entnommen aus Katsuyama & Nagata 1999]

¹⁸Um eine solche Serie so störungsarm und fein aufgelöst messen zu können, bedarf es einen von der Umgebung gut entkoppelten Versuchsaufbau und vor allem eine *sehr* präzise Steuerung des Kontrollparameters. Hierzu sei auf den besonderen Versuchsaufbau in Abb. A.16 verwiesen.

tur, Flüssigkeit etc.) abhängt. Zudem wird oft von einer hohen Sensitivität des Versuchsaufbaus hinsichtlich Beeinflussung aus der Umgebung und kleinsten Fluktuationen in den Kontrollparametern berichtet, was Messergebnisse ganz wesentlich beeinflussen kann. So gibt es über verschiedene Publikationen hinweg – wenn überhaupt – teils qualitative, aber keine nennenswerten quantitativen Übereinstimmungen.

3.2.3. Bi- und Multistabilität

In Kapitel 2.3 wurden Bi- bzw. Multistabilität bereits als Phänomen der Koexistenz zweier bzw. mehrerer Attraktoren eingeführt: Durch kleine (externe) Störungen beeinflusst, könne eine Trajektorie in den Einflussbereich eines anderen Attraktors verschoben werden und bleibe dann durch diesen eingefangen. Experimentell lässt sich Bistabilität beobachten, wenn man die Fließgeschwindigkeit des tropfenden Wasserhahns langsam variiert, währenddessen die Tropfabstände misst und dieses Vorgehen mehrmals wiederholt. Häufig finden sich gewisse Kontrollparameterbereiche, in denen sich das System teils auf die eine Art und Weise, teils auf eine andere Art und Weise verhält. Für diese Bereiche koexistieren also mehrere Attraktoren. Abhängig von (sehr) kleinen externen Störungen bei einem Messdurchlauf gerät das System in den Einzugsbereich genau eines dieser Attraktoren, und verbleibt dort für die Dauer der Existenz des jeweiligen Attraktors. Ein Beispiel für im Experiment beobachtete Bistabilität ist im Tropfdiagramm A.8 im Anhang A.2 zu sehen.

3.2.4. Hysterese

Im Zusammenhang mit nichtlinearen Systemen wird häufig von Hystereseeffekten berichtet. Allgemein ist damit eine Änderung der Wirkung gemeint, die gegenüber der Änderung ihrer Ursache zeitverzögert (und dann teils sprunghaft) eintritt. Regelmäßig wird der tropfende Wasserhahn als ein System beschrieben, an dem u. a. Hysterese beobachtet werden kann (z. B. Shaw 1984, S. 7, Martien et al. 1985, S. 399). Es gibt aber kaum experimentelle Befunde hierzu. Theoretisch ist ein Auftreten von Hysterese bei Variation der Fließgeschwindigkeit denkbar: Die Messergebnisse für identische Werte der Durchflussmenge könnten sich bei Messung bei ansteigendem bzw. abfallendem Durchfluss in gewissen Bereichen unterscheiden. Eine recht komplexe fluiddynamische Simulation des tropfenden Wasserhahns von Kiyono & Fuchikami 1999 ergibt Hystereseeffekte an einem Übergang von periodischem (1er-Zyklus) zu chaotischem Verhalten. Nähert sich das System diesem Übergangspunkt bei ansteigender Fließgeschwindigkeit, findet der Übergang erst bei höheren Geschwindigkeiten statt als bei Annäherung durch abnehmende Fließgeschwindigkeit. Hysterese an dieser Art von Übergang konnte durch Sartorelli et al. 1994

experimentell nicht beobachtet werden; dafür aber beim Auftreten einer Attraktorkrise. Sowohl in o.g. Simulation wie auch im Experiment ist der Hysteresebereich¹⁹ äußerst schmal. Da Ventile und Schrauben bei Zu- und Aufdrehen auch Hystereseeffekte zeigen können, erschwert dies die experimentelle Untersuchung: Wird ein Ventil zur Steuerung der Durchflussmenge genutzt, können sich bei Zu- bzw. Aufdrehen des Ventils bei gleicher Ventilstellung unterschiedliche Fließgeschwindigkeiten einstellen. Zum sicheren Beleg von Hysterese darf daher nicht die Ventilposition als Maß für die Fließgeschwindigkeit verwendet werden.²⁰

3.2.5. Oberflächenspannung und Temperaturabhängigkeit

Gemäß Wu & Schelly 1989 ergibt sich bei Verringerung der Oberflächenspannung ein schärferes, weniger diffuses dynamisches Verhalten. Dies äußert sich beispielsweise in Tropfdiagrammen oder in Return-Maps. Zugleich ändert sich bei Variation der Oberflächenspannung das Systemverhalten *qualitativ*. Exemplarisch ist in Abb. 3.11 eine dreidimensionale Return-Map für normales Wasser und in Abb. 3.12 für Wasser mit verringerter Oberflächenspannung zu sehen. Die Durchflussmengen unterschieden sich, die Temperaturen sind sehr ähnlich. Die schärfere Struktur in Abb. 3.12 ist deutlich zu erkennen. Gleichzeitig zeige sich bei geringerer Oberflächenspannung als bei Wasser mehr quasiperiodisches Verhalten. (Wu & Schelly, 1989)

In der Theorie kann eine Veränderung in der Oberflächenspannung durch Änderung des Dämpfungsparameters γ und der Federkonstante k modelliert werden (vgl. Kapitel 3.1).

Neben der Oberflächenspannung hängt die Tropfdynamik des Systems von den Fluidparametern Viskosität und Dichte ab. Wird Wasser der Temperatur 25 °C um 10 °C erwärmt, so ergibt sich bezogen auf die Werte bei 25 °C eine Abnahme der Oberflächenspannung um 2 %, eine Abnahme der Viskosität um 24 % und der Dichte um 0,3 %. Bei niedrigerer Temperatur ergeben sich schärfere und detailreichere Tropfmuster. Dies lässt sich durch die Abnahme stochastischer Anteile in der Fluidodynamik erklären (geringere Teilchenbewegungen etc.). Das Systemverhalten ändert sich allerdings *nicht qualitativ*. Jedoch bewirkt eine Temperaturverringerung eine Verschiebung der Tropfmuster hin zu höheren Fließgeschwindigkeiten. Dies wird durch den Einfluss der Temperatur auf die Tropfenbildung (Form und Größe) und die Ablösebedingungen (schnelleres Ablösen, geringere Masse) erklärt. (Wu & Schelly, 1989, S. 443)

Katsuyama & Nagata 1999 haben experimentell gezeigt, dass ein universeller linearer Zu-

¹⁹Damit ist das Intervall an Fließgeschwindigkeiten gemeint, über welches sich das durch Hysterese bedingte unterschiedliche Systemverhalten bei aufsteigender bzw. absteigender Fließgeschwindigkeit erstreckt.

²⁰In der Untersuchung von Sartorelli et al. 1994 geschieht allerdings genau dies ohne weitere Diskussion.

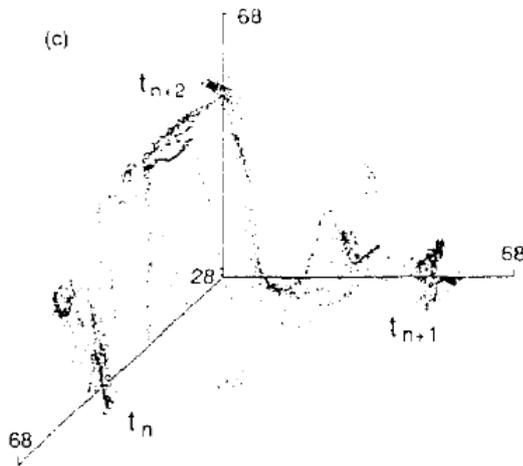


Abbildung 3.11: Return-Map für normales Wasser, $Q = 0,78 \text{ ml/s}$, $\vartheta = 25 \text{ °C}$ [entnommen aus Wu & Schelly 1989, S. 440]

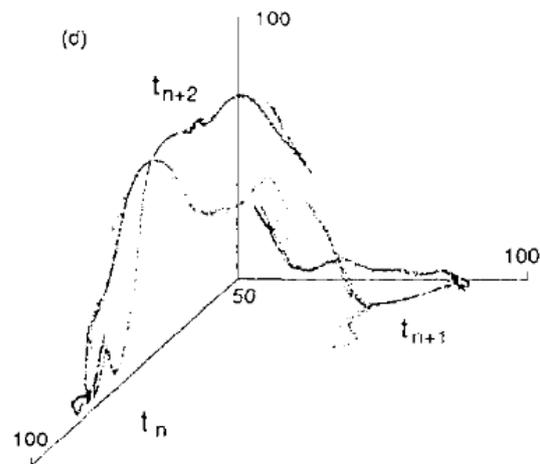


Abbildung 3.12: Return-Map für Wasser mit reduzierter Oberflächenspannung, $Q = 0,56 \text{ ml/s}$, $\vartheta = 23 \text{ °C}$ [entnommen aus Wu & Schelly 1989, S. 440]

sammenhang zwischen Durchflussmenge und Temperatur besteht – siehe Abbildung A.10 im Anhang A.2. (Die Steigung der drei Geraden darin ist jeweils gleich.) Die mittels verbauter Heizelemente fein steuerbare Wassertemperatur bei Austritt dient in ihrer experimentellen Realisierung deshalb der Feineinstellung der Durchflussmenge (siehe auch Abb. A.16). Damit ist also auch die Temperatur ein (zweiter) Kontrollparameter des Systems.

3.3. Versuchsaufbauten

Ein Vergleich der in Veröffentlichungen beschriebenen Versuchsaufbauten zeigt, dass sich kein konkreter Aufbau durchgesetzt hat. Fotos von Aufbauten konnten nicht gefunden werden, wenn überhaupt, wurden Skizzen mit knappen Beschreibungen veröffentlicht. Dadurch bleiben teils viele Detailfragen unbeantwortet. Im Folgenden werden anhand von ausgewählten Beispielen häufige Gemeinsamkeiten und grundlegende Unterschiede in der Realisierung des Systems „tropfender Wasserhahn“ dargestellt.

Es gibt für die experimentelle Untersuchung des tropfenden Wasserhahns zwei grundsätzlich unterschiedliche Vorgehensweisen: Entweder wird die Dynamik des Systems für diskrete, konstante Fließgeschwindigkeiten untersucht, oder diese wird während einer Messung möglichst gleichmäßig und langsam variiert. So kann ein kontinuierlicher Fließgeschwindigkeitsbereich vermessen werden. Ein speziell nur hierfür konzipierter Aufbau ist in Abbildung A.12 zu sehen. Typischerweise soll aber ein Konstanthalten der Fließgeschwindigkeit während einer Messung per Design ebenfalls möglich sein.

Kernstück eines jeden solchen Versuchsaufbaus ist eine Austropfspitze, die mit konstantem Wasserdruck versorgt wird. (Für einen exemplarischen Versuchsaufbau siehe Abbildung 3.13.) Dazu wird ein Wassertank benutzt, dessen Füllhöhe präzise auf einem definierten Niveau gehalten werden kann. Häufig ist für diesen Zweck ein modifiziertes Vergaserventil oder ein Schwimmerventil im Einsatz, das den Wassernachfluss in den Tank kontrolliert. Auch die Verwendung einer Mariott'schen Flasche findet sich in Veröffentlichungen. Zur Messung über einen kontinuierlichen Bereich an Durchflussmengen werden große Wasserreservoirs verwendet, die sich ohne externen Zufluss während einer Messung (langsam) entleeren. Die Steuerung der Fließgeschwindigkeit an der Spitze findet entweder mittels eines verbauten Durchflussreglers (modifiziertes Vergaserventil, Nadelventil etc.) statt, oder durch Höhenverstellung des Wassertanks (die Wasserspiegelhöhe ist proportional zum Wasserdruck und damit zur Durchflussmenge nach Hagen-Poiseuille (Buttkus et al., 1995, S. 3)). Für die Detektion der Wassertropfen wird in der Regel ein Laser mit Photodiode und passendem Analog-Digital-Wandler verwendet. Es ist aber auch möglich, die fallenden Tropfen akustisch mithilfe eines Mikrofons zu registrieren. Zur Übersicht über die genannten Eigenschaften und für weitere konkrete Details siehe die im Anhang abgedruckten Abbildungen A.11 bis A.16.

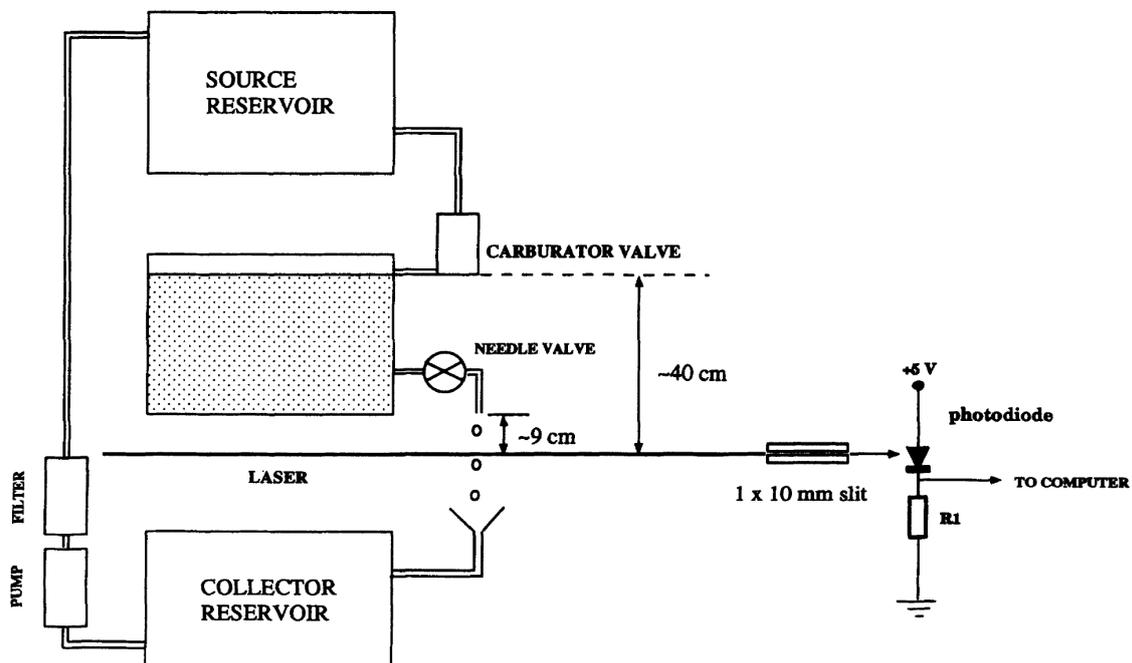


Abbildung 3.13: Experimentelle Realisierung des tropfenden Wasserhahns nach Sartorelli et al.: Regelung der Wasserhöhe und damit des Wasserdrucks mittels modifiziertem Vergaserventil; Regelung der Durchflussmenge an der Spitze mittels schrittmotorgesteuertem Nadelventil; Tropfendetektion über Lichtschranke und Photodiode [entnommen aus Sartorelli et al. 1994, S. 3963]

Große Unterschiede in der experimentellen Realisierung finden sich hinsichtlich Art und Öffnungsweite der Austropfspitze, der Messgenauigkeit der Zeitmessung und in der Gestaltung des/der Kontrollparameter(s) des Systems.

Als Spitzentyp finden sich am häufigsten Glasspitzen, entsprechend geformt aus Laborglasröhrchen oder am Ende von Glasbüretten. Es kommen aber auch Messingdüsen zum Einsatz. Hinsichtlich des Innendurchmessers der Austropföffnung hat sich keine best practice herausgebildet. Verwendete Durchmesser variieren in den Größenordnungen 10^{-1} mm bis 10^0 mm. (z. B. Dreyer & Hickey 1991: Glas, $d = 0,47$ mm und $d = 1,95$ mm; Katsuyama & Nagata 1999: Glas, $d = 5$ mm; Wu & Schelly 1989: Messing, $d = 2$ mm) Allerdings wurden offenbar noch keine umfassenderen systematischen Untersuchungen hinsichtlich des Einflusses der Öffnungsweite der Spitze auf qualitatives und quantitatives Tropfverhalten des Systems unternommen.

Die in Veröffentlichungen beschriebenen Vorrichtungen zur Zeitmessung der Tropfen haben ebenfalls teils große Unterschiede in der Messgenauigkeit. Prinzipiell ist zu unterscheiden zwischen Abtaste, durch die die kürzeste auflösbare Zeitdifferenz begrenzt wird, und Genauigkeit der einem Ereignis zuordnebaren Zeit. Für die Genauigkeit finden sich Angaben zwischen den Größenordnungen 10^{-1} μ s und 10^3 μ s und Abtastraten – sofern veröffentlicht – zwischen 10^0 kHz und 10^1 kHz.

Als Kontrollparameter des Systems wird zwar stets die Durchflussmenge bzw. die Fließgeschwindigkeit genannt, allerdings werden beide nicht direkt experimentell erfasst. Die Fließgeschwindigkeit ist proportional zur Durchflussmenge (s. Gl. (5.2)). Diese kann beispielsweise aus der momentanen Höhe des Wasserspiegels im Reservoir bei vorangegangener Eichung berechnet werden, falls kein zusätzlicher Steuermechanismus an der Austropföffnung verbaut ist (s. z. B. Buttkus et al. 1995 und Abb. A.13, A.15).²¹ Wird die Durchflussmenge nicht erfasst oder aus erfassten Werten berechnet, dann entweder, weil die Systemdynamik nur qualitativ untersucht wird (z. B. Return-Maps ohne Angabe der Fließgeschwindigkeit etc.), oder weil stattdessen die Anzahl der Tropfen pro Sekunde berechnet und als Ersatz-Kontrollparameter verwendet wird.²²

²¹Tatsächlich wurde in keiner Veröffentlichung eine andere Art zur Berechnung der Durchflussmenge als über die Wasserspiegelhöhe gefunden.

²²Dieser Kontrollparameter ist aber deutlich weniger allgemeingültig, da Tropfenbildung und zeitlicher Abstand zwischen den Tropfen zusätzlich von der Spitzengeometrie und Fluidparametern abhängen (s. oben).

4. Experimentelle Realisierung des tropfenden Wasserhahns mit einfachen Mitteln

Gemäß der in Kapitel 1.2 formulierten Forschungsfragen wird zunächst ein neuer Versuchsaufbau vorgestellt und ausführlich auf die Messwerterfassung sowie damit verbundene Schwierigkeiten eingegangen. Nachfolgend wird diskutiert, wie die erhaltenen Messdaten aufbereitet werden können, um Plots und Diagramme zu erhalten, die möglichst gute Einblicke in die Systemdynamik gewähren. Abschließend werden die Ergebnisse einiger Messungen dargestellt.

Sowohl in der Konzeption des Versuchs, als auch bei Vorbereitung und Durchführung der Messungen muss eine wichtige Eigenschaft des Systems stets berücksichtigt werden: dessen Empfindlichkeit gegenüber Eingriffen oder Störungen. Dass kleine Fluktuationen in den Anfangsbedingungen die Systemdynamik (stark) beeinflussen können, wurde bereits eingehend diskutiert. Aber auch jede (kleine) Änderung am laufenden System hat Konsequenzen. Sie führt zunächst dazu, dass das System einen Zustand einnimmt, der durch Überlagerung der Bedingungen vor und nach dem Eingriff bestimmt wird. Erst nach einiger Zeit bestimmen ausschließlich die neu eingestellten Systemparameter dessen dynamisches Verhalten. Im Modell (vgl. Kap. 3.1) lässt sich dieses Übergangsverhalten mit der Kopplung zweier gedämpfter Schwingungen erklären: Nach jedem Eingriff muss zunächst eine gewisse Einschwingzeit abgewartet werden, bis man (in guter Näherung) davon ausgehen kann, dass diejenigen Anteile der gedämpften Schwingungen, die durch die vorige Konfiguration hervorgerufen wurden, zum Erliegen gekommen sind. Diese Anteile nennt man auch **Transienten**. Genauso wirken sich kurzzeitige Störungen auf das System aus: Es braucht einige Zeit, bis es wieder in den Gleichgewichtszustand relaxiert. Man nennt das Systemverhalten in dieser Zeit analog auch **transientes Verhalten**.

4.1. Versuchsaufbau

Wie in Kapitel 3.3 dargestellt, sind für Messungen am tropfenden Wasserhahn zwei Modi Operandi von Interesse: Messung bei konstant gehaltener Fließgeschwindigkeit und Messung über einen kontinuierlichen Bereich an Fließgeschwindigkeiten. Deshalb wurde ein Versuchsaufbau realisiert, der durch leichte Modifikationen beide Messmethoden bedienen kann. Einen Überblick über den gesamten Aufbau gibt Abbildung 4.1. Auf dem mittleren Tisch befindet sich die Tropfeinheit mit Austropföffnung, Auffangbehälter und Sensoren. Auf dem linken Tisch stehen die zur Messwerterfassung und -speicherung nötigen Geräte. Auf den beiden rechten Tischen befindet sich ein großes Wasserreservoir mit optionaler Frischwassereinleitung (ganz rechts).



Abbildung 4.1: Aufbau des Systems „tropfender Wasserhahn“ mit Mariott'scher Flasche (Mitte), großem Wasserreservoir (rechts) und Messwerterfassung (links)

4.1.1. Tropfeinheit und Auffangbehälter

Das Kernstück des Versuchs (s. Abb. 4.2) funktioniert wie folgt: Das Ausgleichsgefäß (1) ist über eine flexible Schlauchleitung an ein l-förmiges Laborglasröhrchen (2) angeschlossen, an dessen Ende sich eine konisch zulaufende Spitze (4) befindet. Falls kein passendes Glasrohr mit Spitze vorhanden ist, kann dieses mit etwas Übung aus einem geraden Stück Laborglas hergestellt werden. Zum Biegen des L-Stücks und zum Ziehen der Spitze genügt die nichtleuchtende Flamme eines normalen Bunsenbrenners. Wichtig ist, die Spitze durch permanentes axiales Drehen während des Ziehens rotationssymmetrisch zu fertigen. Beim Formen des Winkels muss durch unterschiedlich starkes Erwärmen um die Biegestelle herum sichergestellt werden, dass es nicht zu übermäßigen Verdünnungen im

Spitze	Öffnungsdurchmesser	horizontale Länge
1	$(1,70 \pm 0,05)$ mm	$(44,5 \pm 0,1)$ cm
2	$(2,50 \pm 0,05)$ mm	$(44,9 \pm 0,1)$ cm
3	$(5,00 \pm 0,05)$ mm	$(48,8 \pm 0,1)$ cm

Tabelle 4.1.: Öffnungsdurchmesser der verwendeten Spitzen und Länge der horizontalen L-Stücke

Glas an der Außenseite der Biegung kommt. Zum Abtrennen der Spitze vom Glasrest an der passenden Position (das bestimmt dann den Öffnungsdurchmesser der Spitze) ist ein Glasschneider hilfreich. Für den hier vorgestellten Versuchsaufbau wurden drei Spitzen mit verschiedenen Öffnungsdurchmessern hergestellt (Details s. Abb. A.22 und für die Maße s. Tab. 4.1).

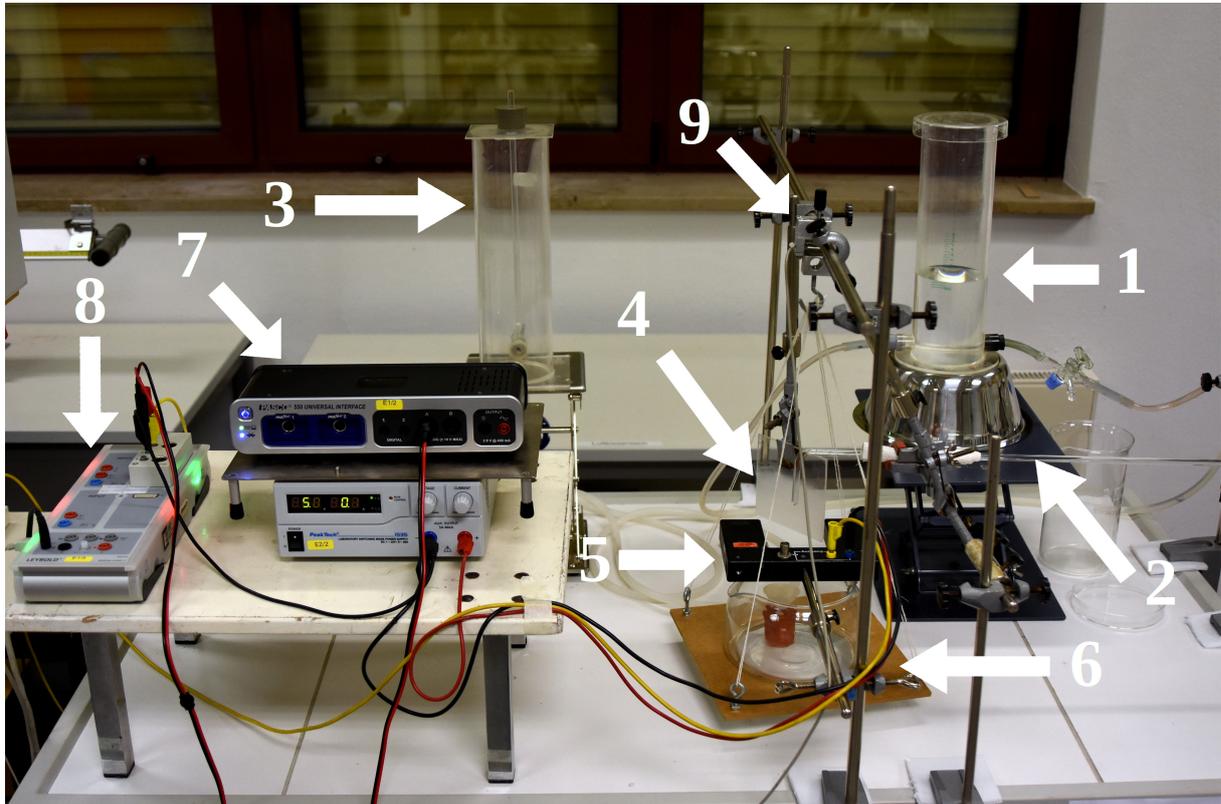


Abbildung 4.2: Detailansicht der Tropfeinheit mit Messwerterfassung:

- 1 Ausgleichsgefäß; 2 horizontale Glaskapillare; 3 Mariott'sche Flasche; 4 Austropfspitze und optionale Streuscheibe; 5 Lichtschranke; 6 freihängendes Auffangbehältnis; 7 Pasco 550 Universalinterface; 8 Leybold Sensor-Cassy 2 mit Timer-Box; 9 Leybold Kraftsensor M

Um den Wasserfluss vom Ausgleichsgefäß zur Spitze regulieren und auch ganz abstellen zu können, wurde ein Absperrhahn in die flexible Schlauchleitung eingebaut und eine Drosselklemme angebracht. Es hat sich gezeigt, dass für eine genügend präzise Voreinstellung der Durchflussmenge ein einfacher Absperrhahn²³ allein nicht ausreichend ist. Mithilfe der Drosselklemme und etwas Fingerspitzengefühl ist eine recht genaue Grobeinstellung möglich. Die Feineinstellung geschieht über die Anpassung der Höhe des Wasserspiegels mittels höhenverstellbarer Podeste. Der Absperrhahn kann stets voll geöffnet bleiben und wird nur bei Beenden der Messtätigkeiten geschlossen.

²³Das verwendete Modell hat zwischen geöffneter und geschlossener Einstellung nur einen Stellungunterschied von 90°. So ein Modell sollte auch in einfach ausgestatteten Sammlungen vorhanden sein.

Die austretenden Wassertropfen werden mit einer Lichtschranke (5) wenige Zentimeter unterhalb der Spitze detektiert. Optional kann im Strahlengang der Lichtschranke eine an der Oberfläche aufgeraute Acrylglasplatte positioniert werden. Bei passender Justierung verhindert sie Fehldetektionen aufgrund von Streueffekten und ermöglicht das Ausblenden von Satellitentropfen falls nötig (s. u.).

Unterhalb der Lichtschranke befindet sich ein Auffangbehältnis (6), das in einer dafür passend hergestellten Vorrichtung frei hängend an einem Kraftsensor (9) befestigt ist (s. auch Abb. A.19). Eine zeitsynchrone Erfassung der Gewichtskraft des Auffangbehältnisses ermöglicht die nachträgliche Berechnung der momentanen Durchflussmenge (s. Kap. 5). Bei Anfertigung der Hängevorrichtung ist darauf zu achten, dass das Auffanggefäß darin rutschfest steht. Für den hier vorliegenden Aufbau wurde das Glasgefäß einer Filterkaffeemaschine verwendet, dessen Boden nicht plan ist: Ein äußerer Ring (ca. 2 cm) des Bodens ist im Vergleich zum Rest um etwa 0,5 cm erhöht. Der tiefere Teil des Bodens sitzt damit fest in einem passend ausgesägten Loch einer dünnen Holzplatte. Weiterhin muss darauf geachtet werden, dass die Aufhängungsschnüre der Konstruktion keine anderen Teile des Aufbaus berühren, damit kein Fehler in der Kraftmessung entsteht. Außerdem sollte das Leergewicht der Konstruktion so gering wie möglich sein, um den Kraftsensor nach Nullung nicht durch unnötiges Tara-Gewicht zu belasten.

Optimalerweise sollte demineralisiertes Wasser zur Systembefüllung benutzt werden. Falls eine entsprechende Deionisierungsanlage zur kostengünstigen Bereitstellung der benötigten Menge an Wasser nicht zur Verfügung steht, kann aber auch Leitungswasser verwendet werden. In den für diese Arbeit durchgeführten Messungen wurde Leitungswasser benutzt.

4.1.2. Messung bei fester Fließgeschwindigkeit

Zur Messung bei fester Fließgeschwindigkeit muss der Wasserdruck über den gesamten Messzeitraum konstant gehalten werden. Da bei nichtlinearen Systemen bereits kleine Fluktuationen in den Systemparametern unvorhersehbare Auswirkungen haben können, muss dies sehr präzise gelingen. Ein direkter Anschluss an das Leitungswassernetz ist aus diesem Grund nicht möglich. Stattdessen wird eine sogenannte **Mariott'sche Flasche** (3) verwendet, die an den Zulauf des Ausgleichsgefäßes angeschlossen wird.²⁴ Ihr Funktionsprinzip ist in Abbildung 4.3 skizziert: ein luftdicht verschlossenes Gefäß mit einer seitlichen Ausflussöffnung, in das von oben eine an beiden Enden offene Röhre hinein-

²⁴Um Irritationen zu vermeiden, sei bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass sich die Verwendung einer Mariott'schen Flasche als ungeeignet für einen störungsarmen Aufbau des Systems herausgestellt hat (s. Kap. 5.3). Weitergehende Untersuchungen hierzu scheinen sinnvoll. Deshalb wird auch die Aufbauvariante mittels Mariott'scher Flasche genau beschrieben.

ragt. Wird das Gefäß mit Wasser bis zur Höhe c vollgefüllt, und befindet sich das nach unten hin offene Ende des Röhrchens zwischen Wasserspiegelhöhe und Ausflussöffnung, so herrscht auf Höhe b der Röhrchenöffnung stets der Umgebungsdruck. Nach dem Pascal'schen Gesetz zum hydrostatischen Druck ist damit der Wasserdruck auf Höhe a der Austrittsöffnung so lange konstant wie $c \geq b$ gilt. So garantiert die Mariott'sche Flasche einen konstanten Wasserspiegel im Ausgleichsgefäß während der Messung (sofern natürlich nicht mehr Wasser entnommen wird, als sich über dem Niveau b in der Flasche befindet). Durch Variieren der Höhe der Flasche über dem Versuchstisch mittels höhenverstellbarem Podest kann zusätzlich die Wasserspiegelhöhe im Ausgleichsgefäß verändert werden. Dies erlaubt eine sehr präzise Feineinstellung der Fließgeschwindigkeit.

Eine Mariott'sche Flasche gehört typischerweise nicht zum Standardinventar einer Physiksammlung, kann aber leicht selbst gebaut werden. Durch diverse Vorversuche sind einige Dinge aufgefallen, die es dabei zu beachten gilt: (a) Das Volumen der Flasche darf nicht zu klein sein. Denn zusätzlich zu der Wassermenge, die für die eigentliche Messung nötig ist, muss Wasser für die Einschwingzeit des Systems eingeplant werden. Auch kann das Niveau b sehr niedrig gewählt werden, um mehr Volumen für die darüberliegende Wassersäule zu schaffen. (b) Es sollte kein senkrecht, sondern besser ein l-förmig gewinkeltes Röhrchen verwendet werden. Ein Biegewinkel knapp über 90° (sodass das abgewinkelte Teilstück im Wasser leicht nach unten hin abfallend geneigt ist) hat sich als ideal herausgestellt. Dies bewirkt, dass eher kleine Luftbläschen aufsteigen, dafür aber häufiger. Das ist wichtig, denn bei großen Luftblasen gibt es auch große Zeitabstände zwischen den einzelnen Blasen. Dann schwankt (gerade bei niedrigen Fließgeschwindigkeiten) der Wasserspiegel mit der Zeit zu sehr. (c) Eine zusätzliche kleine Bohrung im Deckel der Flasche ist sehr nützlich. Diese wird im normalen Betrieb mit einem Gummipfropfen luftdicht verschlossen. Zur Wiederbefüllung der Flasche wird sie geöffnet und das nachzufüllende Wasser ins Ausgleichsgefäß geschüttet. Dank der kommunizierenden Röhren füllt sich damit die Mariott'sche Flasche von alleine. Ein Foto der hier verwendeten Mariott'schen Flasche findet sich in Abbildung A.17 im Anhang. Eine Ansicht des Versuchsaufbaus von oben mit Mariott'scher Flasche ist in Abbildung A.18 zu sehen.

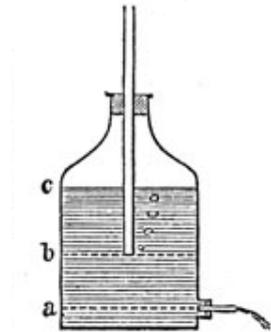


Abbildung 4.3:
Funktionsprinzip einer Mariott'schen Flasche

4.1.3. Messung bei variabler Fließgeschwindigkeit

Für die Messung über einen kontinuierlichen Bereich an Fließgeschwindigkeiten wird das große Wasserreservoir (Nutzvolumen ca. 40l) (ganz rechts in Abb. 4.1) anstelle der Ma-

riott'schen Flasche mit dem Ausgleichsgefäß verbunden. Indem das Gefäß zu Beginn der Messung (voll) gefüllt ist, und langsam leer läuft, kann die Systemdynamik für langsam abnehmende Fließgeschwindigkeiten untersucht werden. Alternativ kann das Reservoir zu Beginn beinahe leer sein, und mit konstanter Zuflussrate langsam befüllt werden. Damit erhält man einen Einblick in die Systemdynamik für ansteigende Durchflussmengen. Ein (quasi)konstanter, langsamer Zulauf kann recht einfach über eine an das Leitungswassernetz angeschlossene Schlauchleitung realisiert werden. Diese wird über eine auf einem separaten Tisch angebrachte Halterung (zur möglichst guten Entkopplung vom restlichen System, s. u.) in das Wasserreservoir eingeleitet (s. Abb. A.21). In beiden Fällen werden vor Beginn der Messung Einstellung der Drosselklemme und Höhe des Wasserreservoirs (höhenverstellbar über Podeste) so aufeinander abgestimmt, dass der gewünschte Bereich an Fließgeschwindigkeiten während der Messung durchlaufen wird.

Um sicherzustellen, dass sich das System während des Leer- oder Volllaufens des Wasserreservoirs (nahezu) im Gleichgewicht befindet, darf sich die Wasserspiegelhöhe nur sehr langsam ändern. Deshalb ist eine möglichst große Oberfläche des Reservoirs wichtig. Dessen Volumen bestimmt den maximal durchmessbaren Bereich während eines einzelnen Messdurchgangs.

4.1.4. Reduzierung von Störeinflüssen

Bekanntermaßen ist das System tropfender Wasserhahn sehr empfindlich. Um den Einfluss von externen und internen Störungen auf das Tropfverhalten des Systems zu verringern, werden mehrere Maßnahmen getroffen:

- (a) Die Tropfeinheit wird auf einen eigenen Tisch (den mittleren in Abb. 4.1) positioniert. Dieser steht auf einer mehrere Zentimeter dicken Schaumstoffpolsterung ohne weiteren Kontakt zum Boden oder zu weiteren Tischen. Dies verringert Schwingungen, die durch Laufen über den Boden im Versuchsraum entstehen.
- (b) Alle Fenster des Versuchsraums bleiben geschlossen, um Luftbewegungen so gering wie möglich zu halten. Eine möglicherweise vorhandene Lüftungsanlage sollte abgeschaltet werden.
- (c) Die Messungen werden in einem Raum durchgeführt, in dem sich möglichst wenige Personen aufhalten. Es sollten möglichst keine Türen geöffnet oder geschlossen werden. Lautes Sprechen und hektische Bewegungen sind zu vermeiden.
- (d) Alle am Tisch mit der Tropfeinheit befestigten Schraubklemmen sind zusätzlich mit Schaumstoffstücken an den Kontaktflächen zum Tisch ausgestattet. Dies verringert die Übertragung von Schwingungen, die durch das Auftreffen der Tropfen im Auffangbehälter entstehen.

(e) Die Anschlussleitung der Mariott'schen Flasche an das Ausgleichsgefäß sollte aus einem möglichst flexiblen und möglichst langen Kunststoffschlauch bestehen (Schlauchlänge hier: ca. 3 m). Dieser dient als Puffer für kleine Druckschwankungen, die durch das Aufsteigen der Luftblasen verursacht werden.²⁵

(f) Eine Schaumstoffpolsterung zwischen Mariott'scher Flasche und höhenverstellbarem Podest verringert Störungen durch die Blasenbildung, die auf den Versuchstisch übertragen werden.

(g) Direkt vor der Austropfspitze befindet sich eine möglichst lange horizontale Kapillare. (Im vorgestellten Aufbau ist das der längere Teil des l-förmigen Glasstücks.) Diese vermindert Turbulenzen im zufließenden Wasser, die sich auf die Tropfenbildung auswirken.

(h) Aufgrund der Abhängigkeit des Tropfverhaltens von der Temperatur (s. Kap. 3.2.5) muss diese während einer Messung möglichst konstant gehalten werden. Deshalb Sonneneinstrahlung oder sonstige Raumtemperaturänderungen vermeiden. Am besten nur Wasser zur Befüllung des Systems verwenden, das bereits die Umgebungstemperatur erreicht hat.

(i) Bei der Befüllung mit Wasser muss außerdem darauf geachtet werden, dass das Wasser möglichst keine Luft enthält. Dies passiert beispielsweise bei Entnahme an einem Wasserhahn mit aufgesetztem Perlator oder bei brausender Befüllung des Entnahmegefäßes. Zur Abscheidung der Luft kann entnommenes Wasser vor Einfüllen in das System für etwa einen Tag stehen gelassen werden. Noch im Wasser enthaltene Luft kann sich während der Messung absetzen. Dadurch sammelt sich Luft in der Zuleitung zur Spitze, vor allem in der Krümmung des L-Stücks direkt vor der Austropföffnung. Dies verursacht starke Turbulenzen im Wasser und reduziert die Fließgeschwindigkeit irregulär. Die Messung wird damit unbrauchbar.

(j) Eine Verunreinigung des Wassers mit Fasern oder Staubflocken kann in nicht-steriler Umgebung bei offenen Behältnissen recht leicht geschehen, führt aber häufig ebenfalls zur Unbrauchbarkeit einer Messung: Die Fremdkörper sammeln sich in der Engstelle an der Schlauchklemme an und verringern (sprunghaft) die Durchflussmenge. Dies kann das Systemverhalten stören, und verursacht zugleich große Fehler in der Datenaufbereitung (s. Kap. 5). Abhilfe liefern Abdeckungen für die offenen Wasserbehältnisse. Diese müssen aber eine (zumindest kleine) Öffnung zur Belüftung haben. Außerdem sollte ausgetropfttes Wasser vor dem Wiedereinfüllen gefiltert oder durch neues Wasser ersetzt werden. Eine regelmäßige, vorsichtige Sichtkontrolle der Engstelle an der Schlauchklemme während laufender Messungen bietet sich an.

(k) Ein konzeptionsbedingter Nachteil des vorgestellten Aufbaus ist die hin- und wieder

²⁵Trotz dieser Maßnahme verursacht die Blasenbildung in der Mariott'schen Flasche (zu) große Störungen im System. Dies wird ausführlich in Kapitel 5.3 diskutiert.

notwendige Entleerung des Auffangbehältnisses – vor allem während langer Messungen über einen kontinuierlichen Fließgeschwindigkeitsbereich. Wird das Behältnis bei laufender Messung entnommen, entleert und wieder in die Hängevorrichtung eingesetzt, sind große Störungen im Tropfbild zu beobachten. Deshalb wird die Entleerung berührungsfrei durchgeführt: Wie in Abbildung A.19 gut zu sehen, ist ein l-förmiges Leitungsstück so befestigt, dass das eine Ende bis fast auf den Boden des Auffangbehältnisses reicht (natürlich ohne diesen zu berühren). An das andere Ende wird eine Schlauchleitung angeschlossen, die vom Versuchstisch heruntergeführt wird. Ist das Auffangbehältnis voll bzw. der Messbereich des Kraftsensors nach oben hin ausgeschöpft, wird am Ende der Abflussleitung eine Schlauchklemme geöffnet. Das Gefäß entleert sich selbsttätig und ohne Berührung. Zur zusätzlichen Reduzierung von Störungen durch Bewegungen an der Abflussleitung ist diese über zwei Halterungen entlastet. Details sind Abbildung A.20 zu entnehmen.

All diese Maßnahmen haben sich als sehr effektiv zur Vermeidung von unerwünschten Transienten erwiesen.

4.2. Messwerterfassung

Um den in Kapitel 1.2 formulierten Forschungsfragen gerecht zu werden, kommen für die Messwerterfassung zwei weit verbreitete Systeme in Frage: Das System *Cassy* von *Leybold* mit zugehöriger Messsoftware *Cassy Lab 2* von *LD Didactic* und das System *Pasco* mit Messsoftware *Pasco Capstone*. Als Sensoren für den zuvor beschriebenen Versuchsaufbau werden ein Kraftsensor und eine Lichtschranke sowie die passenden Interfaces benötigt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird zur Kraftmessung der *Kraftsensor M* von *Leybold* in Verbindung mit einem *Mobile Cassy 2* als Interface verwendet. (Genauso wäre ein *Sensor Cassy 2* möglich.) Der Kraftsensor besitzt die Messbereiche $\pm 50\text{ N}$ und $\pm 5\text{ N}$; letzterer Bereich bietet eine genügend hohe Auflösung und ermöglicht bei symmetrischem Nullpunkt, dass das Füllvolumen des Auffanggefäßes beinahe vollständig ausgenutzt werden kann. Die Daten werden am PC über das Programm *Cassy Lab 2* in diesem Messbereich erfasst und gespeichert. Als Messintervall werden 50 ms und der Modus „gemittelte Werte“ ausgewählt. Im System von *Pasco* könnte der *Kraftsensor hochauflösend* verwendet werden; Genauigkeit und Einstellmöglichkeiten in der zugehörigen Messsoftware sind analog möglich.

Für die Zeitmessung der Wassertropfen wird hier eine Gabellichtschranke etwas älteren Typs von *Phywe* mit analogem Signalausgang verwendet. Ist der Lichtstrahl unterbrochen, gibt sie etwa 0 V aus, andernfalls etwa 5 V. Analoge Lichtschranken von *Leybold* oder *Pasco* eignen sich genauso, allenfalls das Ausgangssignal kann invertiert sein. Für

eine spätere Auswertung sollen für jeden Tropfen die exakten Zeitpunkte des Eintritts in bzw. Austritts aus der Lichtschranke erfasst werden.²⁶ Gemäß der Leitidee – den Versuch so zu konzipieren, dass er mit möglichst breit verfügbarem Equipment aufgebaut werden kann – werden zur Erfassung der Zeitpunkte zwei verschiedene Ansätze verfolgt.

Über eine auf ein *Sensor Cassy 2* aufgesteckte *Timer-Box* von *Leybold* wird das Signal der Lichtschranke erfasst und an die PC-Software *Cassy Lab 2* übermittelt. Dort werden für die Auflösung $2\ \mu\text{s}$ (kleinste mögliche Auflösung) eingestellt, als Betriebsmodus der *Timer-Box* der Modus „Dunkelzeit“.²⁷ Der große Vorteil dieser Art der Messwerterfassung ist, dass die Liveansicht bei laufender Messung bereits ein genähertes Bild des Tropfverhaltens des Systems darstellt.²⁸ Außerdem sind die erhaltenen Messdatendateien recht klein. Entsprechende Pendanten zur *Timer-Box* finden sich bei *Leybold*. Alternativ kann eine moderne Gabellichtschranke benutzt werden, die mit dem entsprechenden Messwert-erfassungsprogramm digital kommuniziert und damit die gleichen Messdaten liefert.

Als Alternative zur digitalen Messdatenverarbeitung wird das Rohsignal der Lichtschranke ohne weitere Verarbeitung digital erfasst, abgespeichert und einer späteren Auswertung unterzogen (s. Kap. 5). Dies macht das Vorhandensein einer *Timer-Box* o. ä. überflüssig. Im Rahmen dieser Arbeit wird dazu das analoge Signal über ein *Pasco 550 Universal Interface* mit der Software *Pasco Capstone* bei einer sample rate von 10 kHz erfasst. Diverse Durchläufe haben gezeigt, dass eine höhere Abtastrate vom Mess-PC für längere Zeit nicht stabil unterstützt wird.²⁹

Bei jeder Messung muss darauf geachtet werden, dass sich das System im Gleichgewichtszustand befindet und keine transienten Anteile enthält. Gerade in nichtperiodischen Regimen kann das Abklingen von Transienten teils sehr lange dauern (10 min und länger). Dies impliziert, vor Beginn der Datenaufzeichnung eine ausreichend lange Einschwingzeit nach Öffnen des Absperrhahns abzuwarten, um keine unnötig fehlerbehafteten Daten auf-

²⁶Damit ist prinzipiell nicht nur der zeitliche Abstand zum vorigen Tropfen berechenbar, sondern auch die Falldauer des Tropfens durch den Lichtstrahl. Letztere ist proportional zum Volumen des Tropfens und liefert ebenfalls interessante Erkenntnisse über die Tropfenbildung und das Systemverhalten.

²⁷Im Vergleich zur Standardeinstellung der Software liefert die Lichtschranke ein invertiertes Signal. Damit erfasst der Modus „Dunkelzeit“ die Zeit *zwischen* zwei Tropfen, also vom Austritt des letzten Tropfens bis zum Eintritt des nächsten Tropfens in die Lichtschranke. Abgespeichert werden in einem Datensatz der exakte Zeitpunkt des Austritts und die gemessene Zeitdauer (bis der nächste Tropfen den Lichtstrahl unterbricht). Bei genau umgekehrten Signal der Lichtschranke kann durch die Softwareeinstellung „invertierte Flanken“ ebenfalls dieses Verhalten ausgewählt werden.

²⁸Die Darstellung ist nicht genau, denn bei chaotischem Systemverhalten sind auch Tropfengrößen sehr unterschiedlich (s. Kap. 5.3.1). Die Verweildauern der Tropfen in der Lichtschranke sind dann nicht konstant, und die Liveansicht nicht ganz korrekt. Dennoch liefert sie einen guten Überblick über die aktuelle Systemdynamik.

²⁹Vermutlich besitzt das Interface nicht genügend Arbeitsspeicher, um einen Engpass in der Datenübertragung zum PC über längere Zeit puffern zu können. Auch der dem Messprogramm zur Verfügung stehende Arbeitsspeicher kann mit der Zeit knapp werden. Für eine etwa halbstündige Messung ergeben sich bei einer Abtastrate von 10 kHz bereits Dateien um die 800 MB.

zunehmen.

Vor der allerersten Messwerterfassung muss zudem die Detektionsschwelle der Lichtschranke passend eingestellt werden. Dabei sind zwei Aspekte zu beachten: Die Lichtschranke muss bei den herrschenden Helligkeitsverhältnissen zuverlässig detektieren können (ggf. maximale Deckenbeleuchtung zur Einstellung anschalten). Abhängig von Spitze und Durchflussmenge bilden sich unterschiedlich große Tropfen, und teils auch äußerst kleine Satellitentropfen (s. Kap. 5.3.1). In vielen Veröffentlichungen ist es übliche Praxis, sehr kleine Tropfen auszublenden, um die erhaltenen Tropfdiagramme zu vereinfachen. Dies kann durch Einbau einer Streuscheibe in den Strahlengang (wie oben erwähnt) geschehen. Damit ist es möglich, die Detektionsschwelle so einzustellen, dass normale Tropfen zuverlässig erkannt werden, kleine Tropfen hingegen nicht.

5. Auswertung und Ergebnisse

Die erhaltenen Rohdaten ermöglichen unterschiedliche Auswertungen. Sicherlich häufig besteht Interesse an Tropfdiagrammen³⁰ oder an Return-Maps für fixierte Durchflussmengen. Entsprechende Plots finden sich – neben weiteren Ergebnissen – im Kapitel 5.3. Abhängig von der Art der Durchführung (konstante oder sich verändernde Fließgeschwindigkeit) und der Art der Messwerterfassung (analoge oder schon digital verarbeitete Daten der Lichtschranke) sind verschiedene Schritte zur Datenaufbereitung nötig, die in Kapitel 5.2 dargestellt werden. Am meisten Aufwand bereitet die Bestimmung der Durchflussmenge. Die entsprechenden theoretischen Zusammenhänge hierfür werden im folgenden Kapitel 5.1 hergeleitet.

5.1. Theoretischer Hintergrund für die Datenaufbereitung

Für den Zusammenhang zwischen Kraftmessung und Fließgeschwindigkeit gilt: Die zeitliche Änderungsrate der Kraft $\dot{F}(t)$ ist proportional zur Durchflussmenge $Q(t)$, und diese wiederum ist proportional zur Fließgeschwindigkeit $v_0(t)$ an der Spitze. Konkret gilt:

$$Q(t) = \frac{\dot{F}(t)}{g \rho_{Wasser}} \quad (5.1)$$

und

$$v_0(t) = \frac{Q(t)}{\pi r^2}, \quad (5.2)$$

wobei g den Ortsfaktor, ρ_{Wasser} die Dichte von Wasser (bei Raumtemperatur) und r den Spitzenradius bezeichnen. In dieser Arbeit wird stets die Durchflussmenge, und nicht die Fließgeschwindigkeit bestimmt.

Für eine präzise Bestimmung der Durchflussmenge ist also die genaue Kenntnis von $\dot{F}(t)$ Voraussetzung. Eine numerische Differentiation der Messdaten kommt nicht in Frage, da diese sehr große Fehler mit sich bringt und sinnvolle Weiterverarbeitung der Messwer-

³⁰Das meint Diagramme, in denen der zeitliche Abstand zum vorigen Tropfen über der Messzeit oder der momentanen Durchflussmenge aufgetragen wird.

te unmöglich macht.³¹ Stattdessen wird auf Basis eines vorgegebenen Funktionentyps ein Fit durch die Kraftmessungsdaten gelegt, damit die Abbildungsvorschrift (im Rahmen der Fehler der Messdaten und des Fit-Algorithmus) genau bestimmt und die erhaltene Funktion analytisch abgeleitet. Damit und mit Gleichung 5.1 kann direkt die Durchflussmenge für jeden einzelnen Tropfzeitpunkt berechnet werden. Elementar an diesem Vorgehen ist die korrekte Wahl des Funktionentyps für den Datenfit.

Für Messungen bei konstant gehaltener Fließgeschwindigkeit gilt $Q = \text{const.}$ Mit Gleichung (5.1) folgt $\dot{F}(t) = \text{const.}$, also ist für die Kraft $F(t)$ ein linear-affiner Zusammenhang zu erwarten.

Wird mit einer Messung durch Leertropfenlassen ein Bereich an Fließgeschwindigkeiten durchlaufen, ist die Herleitung etwas komplizierter.³² Es wird angenommen, dass die Querschnittsfläche $A(h)$ des Wasserbehältnisses über die Höhe h des Wasserspiegels konstant sei, dass zu Beginn der Messung der Kraftsensor die Kraft F_0 anzeige und sich im Reservoir Wasser mit dem Volumen V_{max} befinde. Wenn kein Wasser mehr im System ist, endet die Messung. Dieser Zeitpunkt sei t_{ende} . Es soll also gelten:

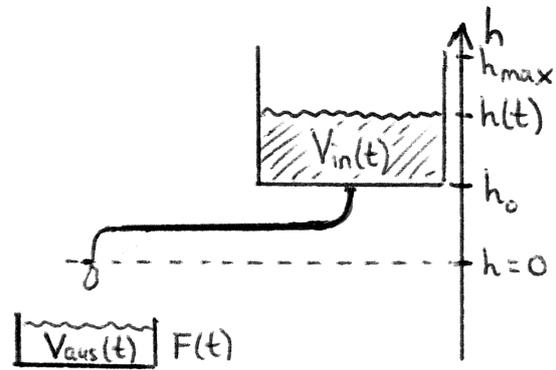


Abbildung 5.1: Skizze mit verwendeten Variablen zur Herleitung des Funktionentyps von $F(t)$

$$A(h) = \text{const.} =: A \quad (5.3a)$$

$$F(0) = F_0 \quad (5.3b)$$

$$V_{in}(0) = V_{max} \quad (5.3c)$$

$$V_{in}(t_{ende}) = 0 \quad (5.3d)$$

$$h(t_{ende}) = h_0 \quad (5.3e)$$

Nachfolgende Gleichungen gelten stets für $0 \leq t < t_{ende}$.

Für das ausgetropfte Volumen $V_{aus}(t)$ gilt

$$V_{aus}(t) = \int_0^t Q(\tau) d\tau, \quad (5.4)$$

wobei $Q(t)$ die Durchflussmenge bezeichne. Nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille und

³¹In Frage kommende Auswertungsverfahren mithilfe einer numerischen Ableitung wurden anhand von erhobenen Daten ausprobiert und allesamt verworfen. Dem Umfang dieser Arbeit geschuldet kann jedoch nicht im Detail weiter darauf eingegangen werden.

³²Dennoch wird sie nachfolgend detailliert ausgeführt, da sie sich nicht in der Literatur findet.

gemäß Ausführung in Buttkus et al. 1995 gilt

$$Q(t) \propto h(t), \quad (5.5)$$

und damit

$$Q(t) = \beta h(t). \quad (5.6)$$

β sei eine Konstante. Weiters gilt für den Zusammenhang zwischen ausgetropftem Volumen $V_{aus}(t)$ und im System verbleibendem Volumen $V_{in}(t)$:

$$V_{in}(t) = V_{max} - V_{aus}(t) \quad (5.7a)$$

$$V_{in}(t) \stackrel{(5.3a)}{=} A(h(t) - h_0). \quad (5.7b)$$

Aus (5.7a) und (5.7b) folgt

$$V_{aus}(t) = V_{max} - A(h(t) - h_0). \quad (5.8)$$

Für eine Gewichtskraft gilt allgemein $F_G = mg$. Damit erhält man für die Gewichtskraft des ausgetropften Wassers

$$F(t) = m(t)g \stackrel{(5.3b)}{=} \rho V_{aus}(t)g + F_0. \quad (5.9)$$

So ergeben sich für $F(t)$ die zwei Beziehungen

$$F(t) \stackrel{(5.9)}{=} \rho g V_{aus}(t) + F_0 \stackrel{(5.4)}{=} \rho g \int_0^t Q(\tau) d\tau + F_0 \quad (5.10a)$$

und

$$F(t) \stackrel{(5.8)}{=} \rho g (V_{max} - A(h(t) - h_0)) + F_0 \stackrel{(5.6)}{=} \rho g \left[V_{max} - A \left(\frac{Q(t)}{\beta} - h_0 \right) \right] + F_0 \quad (5.10b)$$

$$\iff Q(t) = \frac{\beta V_{max}}{A} + \beta h_0 + \frac{\beta F_0}{A\rho g} - \frac{\beta}{A\rho g} F(t). \quad (5.10c)$$

Aus (5.10a) ergibt sich durch Differentiation nach der Zeit und Einsetzen von (5.10c):

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) &= \rho g Q(t) \stackrel{(5.10c)}{=} \frac{\rho g \beta V_{max}}{A} + \rho g \beta h_0 + \frac{\beta F_0}{A} - \frac{\beta}{A} F(t) \\ \iff \dot{F}(t) + \frac{\beta}{A} F(t) - \left(\frac{\rho g \beta V_{max}}{A} + \rho g \beta h_0 + \frac{\beta F_0}{A} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Dies stellt eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar. Als Lösung findet sich

$$F(t) = \left(\frac{b}{a} + F_0 \right) e^{-at} - \frac{b}{a}, \quad (5.12)$$

wobei zur Übersichtlichkeit die Parameter a und b zu $a := \frac{\beta}{A}$ und $b := -\frac{\rho g \beta V_{max}}{A} - \rho g \beta h_0 - \frac{\beta F_0}{A}$ definiert wurden.

Bei einer Messung mit externem Zufluss Q_{zu} muss sich zum Beginn der Messung bereits eine (kleine) Menge Wasser V_0 im Reservoir befinden, damit das System zuvor entlüftet werden konnte. Dementsprechend betrage die Durchflussmenge zu Beginn Q_0 . Weiterhin soll der externe Zufluss konstant sein. Es werde also angenommen:

$$A(h) = \text{const.} =: A \quad (5.13a)$$

$$Q_{zu}(t) = \text{const.} =: Q_{zu} \quad (5.13b)$$

$$F(0) = F_0 \quad (5.13c)$$

$$V_{in}(0) = V_0 \quad (5.13d)$$

$$Q(0) = Q_0 \quad (5.13e)$$

$$h(t_{ende}) = h_{max}. \quad (5.13f)$$

Wenn das Reservoir bis h_{max} gefüllt ist, endet die Messung. Dieser Zeitpunkt sei t_{ende} . Nachfolgende Gleichungen gelten stets für $0 \leq t < t_{ende}$. Analog zur Argumentation oben gilt auch in diesem Fall:

$$F(t) = \rho g V_{aus}(t) + F_0 \quad (5.14a)$$

$$V_{aus}(t) = \int_0^t Q(\tau) d\tau \quad (5.14b)$$

$$Q(t) = \beta h(t), \quad b \in \mathbb{R}. \quad (5.14c)$$

Für den Zusammenhang zwischen ausgetropftem Volumen $V_{aus}(t)$ und im System verbleibendem Volumen $V_{in}(t)$ muss in diesem Fall gelten:

$$V_{in}(t) \stackrel{(5.13d)}{=} V_0 + V_{zu}(t) - V_{aus}(t) \stackrel{(5.13b)}{=} V_0 + Q_{zu}t - V_{aus}(t) \quad (5.15a)$$

$$V_{in}(t) \stackrel{(5.13a)}{=} A(h(t) - h_0) \quad (5.15b)$$

also umgestellt

$$V_{aus}(t) \stackrel{(5.15a)}{=} V_0 + Q_{zu}t - V_{in}(t) \stackrel{(5.15b)}{=} V_0 + Q_{zu}t - A(h(t) - h_0). \quad (5.15c)$$

So ergeben sich für $F(t)$ die zwei Beziehungen

$$F(t) \stackrel{(5.14a)}{=} \rho g V_{aus}(t) + F_0 \stackrel{(5.14b)}{=} \rho g \int_0^t Q(\tau) d\tau + F_0 \quad (5.16a)$$

$$\begin{aligned} F(t) &\stackrel{(5.14a)}{=} \rho g V_{aus}(t) + F_0 \stackrel{(5.15c)}{=} \rho g [V_0 + Q_{zu}t - A(h(t) - h_0)] + F_0 \\ &\stackrel{(5.14c)}{=} \rho g \left[V_0 + Q_{zu}t - A \left(\frac{Q(t)}{\beta} - h_0 \right) \right] + F_0. \end{aligned} \quad (5.16b)$$

Aus (5.16a) ergibt sich durch Differentiation und Einsetzen von (5.16b):

$$\dot{F}(t) = \frac{\rho g \beta}{A} (V_0 + Ah_0 + F_0) + \frac{\rho g \beta Q_{zu}}{A} t - \frac{\beta}{A} F(t)$$

$$\iff \dot{F}(t) + \frac{\beta}{A}F(t) - \frac{\rho g \beta Q_{zu}}{A}t - \frac{\rho g \beta}{A}(V_0 + Ah_0 + F_0) = 0 \quad (5.17)$$

Für diese inhomogene nicht-autonome lineare DGL 1. Ordnung findet sich die Lösung

$$F(t) = \left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a^2} + F_0 \right) e^{-at} - \frac{b}{a}t + \left(\frac{b}{a^2} - \frac{c}{a} \right), \quad (5.18)$$

wobei zur einfacheren Darstellung $a := \frac{\beta}{A}$, $b := -\frac{\rho g \beta Q_{zu}}{A}$ und $c := -\frac{\rho g \beta Q_{zu}}{A}t - \frac{\rho g \beta}{A}(V_0 + Ah_0 + F_0)$ definiert wurden.

Aus der Theorie folgt also, dass als Fitfunktion für die Messwerte der Kraft bei einer Leertropfmessung gemäß Gleichung (5.12) ein Funktionstyp der Form

$$f(t) = a_0 e^{-a_1 t} + a_2 \quad (5.19)$$

zu wählen ist.

Weiterhin folgt aus Gleichung (5.18) für eine Messung bei externem Wasserzulauf, dass die Kraftmessdaten einem funktionalen Zusammenhang der Form

$$f(t) = a_0 e^{-a_1 t} + a_2 t + a_3 \quad (5.20)$$

folgen.

Um den in Kapitel 1.2 formulierten Forschungsfragen gerecht zu werden, ist diese Erkenntnis einer kritischen Diskussion zu unterziehen, denn: Genauso wie der Aufbau des Versuchs mit einfachen, häufig vorhandenen Mitteln möglich sein soll, muss dies auch für die Auswertung gelten. Beispielsweise mittels *Origin* ist ein Fit auf Basis des Typs (5.19) und (5.20) möglich. Derartige Spezialprogramme sind aus Kostengründen jedoch häufig nicht verfügbar; stattdessen wird meist auf ein Tabellenkalkulationsprogramm zurückgegriffen. Zum derzeitigen Stand unterstützen zwar die am weitesten verbreiteten Programme *Microsoft Excel* und *Libre Office Calc* einen rein exponentiellen Datenfit gemäß Funktion (5.19), aber keinen exponentiell-linearen Fit gemäß Funktion (5.20). Daher liegt es nahe, als Alternative einen möglichst guten und standardmäßig möglichen Fit zu finden.

Mittels einer Taylor-Entwicklung können für beide Funktionstypen Approximationspolynome beliebiger Genauigkeit bestimmt werden, wobei ein polynomieller Fit sehr hohen Grades natürlich weder physikalisch sinnvoll ist, noch sich effizient damit umgehen lässt. Um einen sinnvollen Approximationsgrad zu bestimmen, seien zwei Überlegungen genannt:

Experimentell lässt sich beobachten, dass sich bei beiden Arten der kontinuierlichen Messung die Durchflussmenge $Q(t)$ über die Zeit hinweg ändert. Da nach Gleichung (5.1) $\dot{F}(t) \propto Q(t)$ gilt, muss F mindestens ein Polynom 2. Ordnung sein. Da nach Gleichung

chung (5.5) ebenfalls $Q(t) \propto h(t)$ gilt, und Beobachtungen zeigen, dass sich die Wasserspiegelhöhe *nicht* konstant über die Zeit ändert, also $\dot{Q}(t) = \ddot{F}(t) \neq \text{const.}$, muss F aus physikalischen Gründen mindestens mit einem Polynom dritten Grades approximiert werden.

Für die Messwerte einer exemplarischen Kraftmessung bei Leertropfen wurde ein Fit auf Basis von (5.19) vorgenommen und die Parameter a_i bestimmt. Mit einem *Mathematica*-Rechenblatt (s. Anhang A.7) kann für diese exponentielle Fitfunktion der Fehler bei Taylor-Approximation über den gesamten Messzeitraum hinweg exemplarisch berechnet und für verschiedene Grade der Approximationspolynome verglichen werden. Die konkreten Zahlenwerte haben natürlich keine allgemeingültige Aussagekraft, aber zur Abschätzung der typischen Größenordnungen der Fehler dürfte die Rechnung genügen. Eine quadratische Approximation verursacht demnach einen Größtfehler³³ der Größenordnung $10^{-2} \%$, eine kubische einen Fehler von $10^{-4} \%$, eine Approximation durch ein Polynom vierten Grades einen Fehler von $10^{-5} \%$. Unter der starken Annahme, dass bei exponentiellem Datenfit kein Fitfehler entstehen würde, beinhaltet damit jeder über eine polynomielle Fitfunktion berechnete Kraft-Wert $F(t)$ einerseits den (theoretischen) Fehler aufgrund des polynomiellen statt exponentiellen Fits, andererseits einen realen Messfehler. Für den hier verwendeten *Kraftsensor M* wird im Datenblatt ein Messfehler von 2% ausgewiesen.³⁴ Damit liegt bereits für einen quadratischen Fit der Fitfehler vier Größenordnungen unter dem Messfehler. Ein polynomieller anstelle eines exponentiellen Fits kann also guten Gewissens gerechtfertigt werden.

Insgesamt werden im Rahmen der Datenaufbereitung (s. nachfolgender Abschnitt) daher für Messungen über ein Kontinuum an Fließgeschwindigkeiten stets kubische Fits verwendet.³⁵

5.2. Konkretes Vorgehen bei der Datenaufbereitung

Zur Erstellung von Return-Maps werden per se nur die Messwerte der Lichtschranke benötigt. Soll zusätzlich angegeben werden, wie groß die Durchflussmenge für das in der Return-Map dargestellte Systemverhalten ist, müssen auch die Messwerte des Kraftsensors

³³Größtfehlerabschätzung deshalb, weil die üblichen Fitalgorithmen die konkreten Polynomkoeffizienten nicht durch möglichst gute Approximation *eines einzelnen* Punktes (wie bei einer Taylor-Entwicklung) bestimmen, sondern durch möglichst guten Fit an die *gesamten* Daten.

³⁴Ob sich dieser Wert auf reading oder range bezieht, ist nicht angegeben.

³⁵Die theoretischen Fitfehler durch polynomielle Approximation der Daten einer Messung bei externem Zufluss gemäß Funktionstyp (5.20) lassen sich analog bestimmen. Auch für diesen Messtyp ergeben sich genügend geringe Approximationsfehler. Zusätzlich ist zu anmerken, dass ein linear-exponentieller Datenfit in *Origin* (Funktionstyp „LinExp“) standardmäßig nicht konvergiert. Grund hierfür dürften unpassende Standardeinstellungen für die Initialisierungsbedingungen der Fitparameter sein.

ausgewertet werden. Zum Plotten von Tropfdiagrammen, die als unabhängige Variable die Durchflussmenge verwenden (das ist der Standard), müssen die nötigen Informationen aus beiden Messdatensätzen extrahiert werden: Ist für die entsprechende Messung eine Funktion $Q(t)$ für die Durchflussmenge bestimmt (s. u.), wird für jeden aufgezeichneten Tropfzeitpunkt t_i der Wert $Q(t_i)$ berechnet. Liegen die Daten dann in der Form Tropfabstand in Abhängigkeit von der Durchflussmenge vor, können sie als Tropfdiagramm geplottet werden.

Zur Arbeitserleichterung bei einigen Aufbereitungsschritten wurde ein Python-Skript geschrieben, das eine Messdatendatei im csv-Format einliest, und wiederum eine csv-Datei mit den aufbereiteten Daten ausgibt. Die Art der gewünschten Berechnungen werden durch Angabe von Optionen spezifiziert. Das Skript findet sich vollständig im Anhang A.8.

Stets nötig ist die Aufbereitung der Messdaten der Lichtschranke. Wurden sie mit einer *Timer-Box* und *Cassy Lab 2* aufgezeichnet, müssen – wie in Kapitel 4.2 angemerkt – die korrekten Tropfabstände erst berechnet werden. Abbildung 5.2 verdeutlicht die Problematik:

Tropfen kommen zu gewissen Zeiten $t_{1,2,\dots}$ in den Erfassungsbereich der Lichtschranke, und verlassen diesen wieder zu den Zeiten $\tau_{1,2,\dots}$. Eine Zeile der *Cassy*-Messdatei enthält den Zeitpunkt τ_i des Verlassens und die Dauer $\Delta\tau_i$ bis zum nächsten Tropfen.

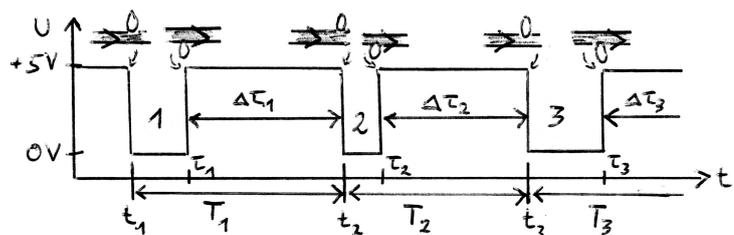


Abbildung 5.2: verwendete Variablen zur Beschreibung des von *Cassy* erfassten Lichtschrankensignals

Zum Plotten wird aber das Tupel $(t_i; T_i)$ benötigt, das jedoch leicht berechnet werden kann:

$$t_i = \tau_{i-1} + \Delta\tau_{i-1} \quad (5.21)$$

$$T_i = t_{i+1} - t_i \quad (5.22)$$

Wurde das analoge Lichtschrankensignal aufgezeichnet, müssen daraus die Zeitpunkte der abfallenden Flanken sowie die zeitlichen Abstände zu der jeweils nächsten Flanke bestimmt werden.

Beide Arten der Auswertung können durch das bereits erwähnte Python-Skript vorgenommen werden. Mit der Kommandozeilenoption `-m <cassy|raw>` kann zwischen dem Auswertungsmodus für eine *Cassy*-Messdatendatei oder für eine Datei mit dem analogen Signal umgeschaltet werden.

Zur Bestimmung der Durchflussmenge bei Messungen mit konstant gehaltener Fließgeschwindigkeit wird ein linear-affiner Fit an die Messdaten angepasst (s. Kap. 5.1). Damit und mit Formel (5.1) ist die Durchflussmenge Q schon berechnet. Ein Tropfdiagramm gibt

für eine einzelne Messung bei fester Fließgeschwindigkeit wenig Sinn. Zur Erstellung einer Return-Map muss jeweils die Zeit zum nächsten Tropfen über der Zeit zum vorigen Tropfen aufgetragen werden. Liegen Zeitpunkte und Tropfdauern bereits fertig berechnet vor (s. o.), ist die Vorbereitung der Plotdaten mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms oder entsprechender Tabellenkalkulationsfunktionen im Plotprogramm schnell erledigt.

Zur Bestimmung der Funktion $Q(t)$ bei Messung über ein Kontinuum an Fließgeschwindigkeiten ist etwas mehr Aufwand erforderlich. Da solche Messungen i. d. R. recht lange dauern (typischerweise einige Stunden), muss zum einen das Auffanggefäß bei laufender Messung entleert werden, zum anderen u. U. die Messung in mehrere direkt aufeinanderfolgende Messungen mit einzelnen Messdatendateien aufgeteilt werden (um die Messsoftware nicht zu überlasten). Die in den Einzeldateien der Kraftmessung gespeicherten Messwerte haben typischerweise die in Abbildung 5.3 skizzierte Form.

Sofern nicht aufgezeichnet wird, wie viel Zeit zwischen Ende einer Messdatei und Beginn der nächsten Messdatei vergangen ist, müssen die Dateien zunächst einzeln aufbereitet werden. Die Grundidee ist dabei folgende:

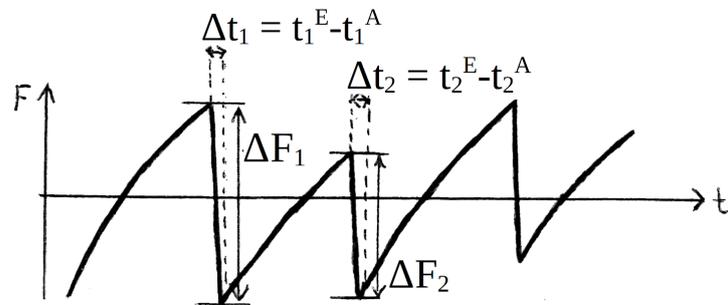


Abbildung 5.3: verwendete Bezeichnungen zur Beschreibung der Aufbereitung der Kraft-Messdaten

Durch Bestimmung des jeweils entnommenen Gewichts ΔF_i und durch Extrapolationen über die Zeitintervalle Δt_i werden die Kraft-Messwerte zu einer monoton steigenden Kurve (mit Lücken während der Entleerungszeiten Δt_i) zusammengesetzt. Für diese wird, wie oben diskutiert, ein kubischer Fit $F(t)$ bestimmt. Damit und mit Gleichung 5.1 ist schließlich für jeden Zeitpunkt t eines detektierten Wassertropfens die momentane Durchflussmenge $Q(t)$ bestimmt. Zum Zusammensetzen einer solchen Kurve wurde im Rahmen dieser Arbeit wie folgt vorgegangen:

1. Bestimmung der Zeitpunkte von Beginn t_i^A und Ende t_i^E der Entleerungen
2. Anlegen eines polynomiellen Fits $p_i(t)$ dritter Ordnung an das der jeweiligen Entleerung vorangegangene Kurvenstück
3. Berechnung der extrapolierten Kraft $p_i(t_i^E)$ zum Ende des entsprechenden Entleerungszeitraums
4. Bildung des arithmetischen Mittelwerts $\overline{F_i^E}$ der ersten elf Kraftmesswerte nach Ende der Entleerung
5. Addition des entleerten Gewichts $\Delta F_i = p_i(t_i^E) - \overline{F_i^E}$ zu allen auf die entsprechende Entleerung folgenden Messwerten

Durch anschließenden Fit der so erhaltenen transformierten Messwerte ist die Durchflussmenge – wie oben erläutert – schnell berechnet und mit den Tropfabständen verknüpft. Das im Anhang (A.8) abgedruckte Python-Skript ist hierbei behilflich.

Bei allen im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Datenaufbereitungen wurde für die Fits der transformierten Daten jeweils das Korrelationsquadrat r^2 mit bestimmt. Alle Korrelationswerte befinden sich im Bereich $0,99997 \leq r^2 \leq 1,00000$. Dies belegt nochmals, dass die Kraftmesswerte ausreichend gut (sehr gut) durch ein Polynom dritten Grades approximiert werden.

5.3. Messergebnisse

Nachfolgend werden einige Erkenntnisse zur Dynamik des Systems „tropfender Wasserhahn“, die den aufgenommenen Messdaten entnommen werden können, vorgestellt. Die Erstellung von Phasendiagrammen oder Stabilitätsberechnungen sind aufgrund der Unkenntnis eines genauen funktionalen Zusammenhangs des zugrunde liegenden dynamischen Systems nicht möglich. Eine Diskussion der hier erhaltenen Ergebnisse vor dem Hintergrund der an anderen Stellen veröffentlichten Ergebnissen und unter Berücksichtigung der Forschungsfragen findet sich im Kapitel 6. Zusätzlich sei zum Vergleich auf Kapitel 3 verwiesen.

5.3.1. Tropfenbildung

Für alle drei vermessenen Spitzen (s. Kap. 4.1 und Tab. 4.1) beobachtet man unterschiedliches Verhalten in der Tropfenbildung.

Wie in Abbildung 5.4 sehr gut erkennbar, kann die in Kapitel 3.2.1 beschriebene Art und Weise der Tropfenbildung mit necking beobachtet werden. Für Spitze 2 ($d \approx 2,5$ mm) und Spitze 3 ($d \approx 5,0$ mm) wurden Stroboskopaufnahmen der Tropfenbildung angefertigt, siehe Abbildungen A.23 bis A.26 im Anhang: Bei niedrigen Durchflussmengen (etwa 3 Tropfen/s) folgt auf jeden regulären Tropfen genau ein Satellitentropfen, der bei Spitze 2 sehr klein im Vergleich zum Volumen der regulären Tropfen, bei Spitze 3 schon etwas größer ist. Für hohe Durchflussmengen (etwa 40 Tropfen/s; chaotisches Verhalten) gibt es bei Spitze 2 keine Satellitentropfen mehr; bei Spitze 3 entstehen scheinbar zufällig teils mehre-

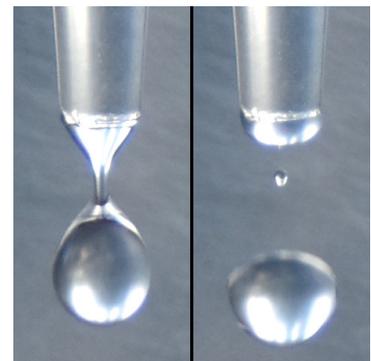


Abbildung 5.4: Tropfenablösung mit necking und darauffolgendem Satellitentropfen an Spitze 2 bei niedriger Durchflussmenge (etwa 3 Tropfen/s)

re und unterschiedlich große Satellitentropfen.³⁶ Die sehr kleinen Satellitentropfen von Spitze 2 werden von der Lichtschranke nicht detektiert, die von Spitze 3 teilweise schon.

Dass bei kleineren Öffnungsdurchmessern auch kleinere reguläre Tropfen entstehen, kann bestätigt werden und ist aus den Stroboskopaufnahmen im Anhang ersichtlich.

Ein Oszillieren des sich bildenden Tropfens kann bei allen Spitzen mit bloßem Auge oder einer normalen Videokamera gut beobachtet werden. Aus den Fotos im Anhang lässt sich dies erahnen.

Für eine Spitze mit sehr kleinem Durchmesser (hierfür untersucht: $d \approx 0,5 \text{ mm}$) wird bereits ab vergleichsweise niedrigen Durchflussmengen eine deutlich ausgeprägte, seitliche Geschwindigkeitskomponente der verlassenden Tropfen beobachtet. (Der sehr kleine Durchmesser impliziert sehr hohe Fließgeschwindigkeiten an der Spitze, vgl. Gleichung (5.2).) Dies führt dazu, dass einige Tropfen den Detektionsbereich der Lichtschranke umgehen.

5.3.2. Qualität der Messdaten

Prinzipiell sind mit dem in Kapitel 4.1 vorgestellten Versuchsaufbau Messungen über einen kontinuierlichen Bereich an Fließgeschwindigkeiten sowie für fixierte Werte möglich. Ein Vergleich der erhaltenen Daten zeigt, dass der Versuchsaufbau mit Mariott'scher Flasche zum Konstanthalten der Wasserspiegellhöhe in der oben beschriebenen Realisierung jedoch ungeeignet ist: Obwohl nach jedem Eingriff am System mindestens 15 Minuten Einschwingzeit abgewartet wurden, zeigt sich ein deutlich weniger filigranes, leicht zittriges und teils andersartiges Tropfenbild als bei Messungen mit dem großen Wasserreservoir. Noch längere Einschwingzeiten ergeben keine Verbesserung. Es ist davon auszugehen, dass das Bilden und Aufsteigen der Luftblasen in der Mariott'schen Flasche zwei permanente Störungen für das System darstellen: Einerseits können sich über den Versuchstisch (trotz Schaumstoffpolsterungen) mechanische Schwingungen ausbreiten und mit dem Prozess der Tropfenbildung wechselwirken. Andererseits – und das wird den deutlich größeren Effekt darstellen – verursachen die sich bildenden Luftblasen dauerhaft kleine Druckschwankungen, die sich als Longitudinalwellen im System bis zur Spitze ausbreiten. Beobachtet man unter Tropfenbildung an der Spitze den Wasserspiegel des Ausgleichsgefäßes, stellt man eine dauerhafte leichte Bewegung der Wasseroberfläche fest, wenn die Mariott'sche Flasche Luft zieht. Keine Bewegung lässt sich hingegen ausmachen, wenn stattdessen das große Wasserreservoir angeschlossen ist. Auch hieran ist erkennbar, dass die Mariott'sche Flasche dauerhafte Transienten im System bewirkt.

³⁶Dies steht scheinbar im Widerspruch zur Feststellung in Kapitel 3.2.1; allerdings hat Spitze 3 einen mehr als doppelt so großen Durchmesser wie die dort von Dreyer & Hickey untersuchte Spitze.

Weiterhin zeigt sich ein qualitativer Unterschied in der Zeitmessung: Die mittels *Timer-Box* erhobenen Daten (eingestellte Auflösung: 2 μ s) bieten erwartungsgemäß eine bessere Auflösung im Vergleich zu den ausgewerteten analogen Daten (gewählte Abtastrate: 10 kHz, entspricht einer Auflösung von 0,1 ms). Besonders deutlich wird dies beispielsweise in Abbildung 5.5, in der Strukturen dargestellt sind, die eine recht geringe zeitliche Aufspaltung besitzen (wenige Millisekunden). Dennoch sind das qualitative Systemverhalten und die meisten Strukturen aber genauso bei Auswertung der analog erfassten Daten gut beobachtbar. Siehe hierzu auch Abbildung A.28 im Anhang.

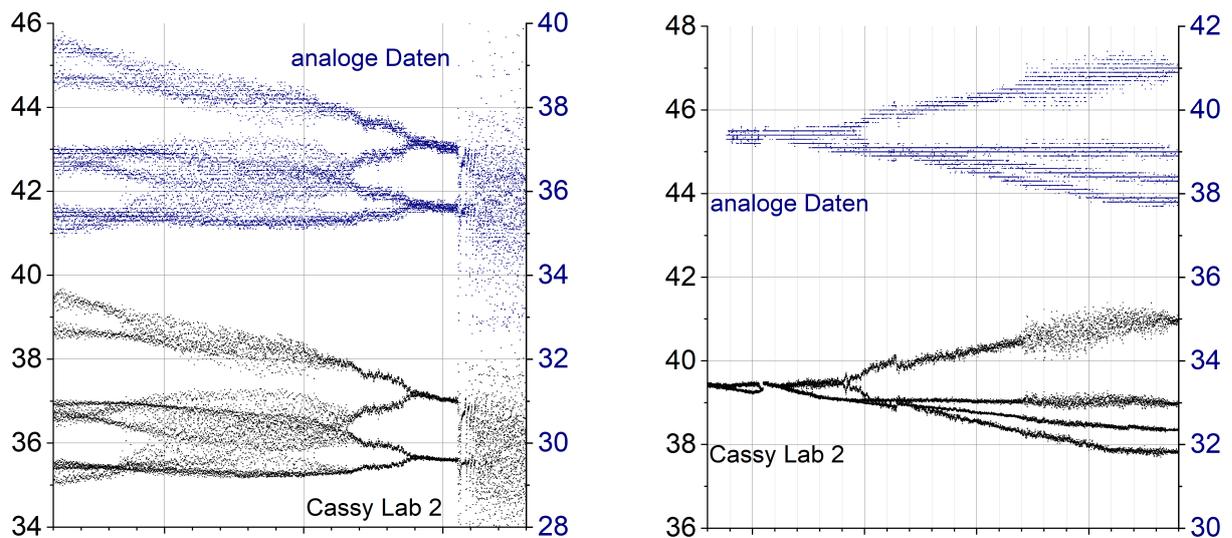


Abbildung 5.5: Vergleich der mittels *Cassy Lab 2* aufgenommenen Daten mit den aufbereiteten Rohdaten bei 10 kHz-Abtastrate (Abszisse: Durchflussmenge, Ordinate: Tropfabstände in ms)

Alle nachfolgend vorgestellten Ergebnisse wurden unter Verwendung des großen Wasserbehältnisses anstelle der Mariott'schen Flasche und mithilfe der *Timer-Box* für die Zeitmessung erhalten. Sofern nicht anders gekennzeichnet, wurde bei abnehmender Durchflussmenge gemessen.

5.3.3. Tropfdiagramme

Für Spitze 1 und 2 wurden die Tropfabstände über einen sehr breiten Bereich an Fließgeschwindigkeiten aufgezeichnet und für die Darstellung in Tropfdiagrammen (wie in Kap. 5.2 beschrieben) aufbereitet. In untenstehender Abbildung 5.6 findet sich exemplarisch das für Spitze 2 erhaltene Diagramm; das für Spitze 1 ist in Abbildung A.27 im Anhang zu sehen. In beiden Diagrammen zeigt sich ein sehr komplexes Tropfbild, das erst für niedrigere Durchflussmengen ein überwiegend einfach-periodisches Verhalten aufweist. Das Systemverhalten bei Verwendung von Spitze 2 ähnelt erstaunlich der von Sartorelli et al. 1994, S. 3964 gefundenen Tropfdynamik (s. auch Abb. A.6).

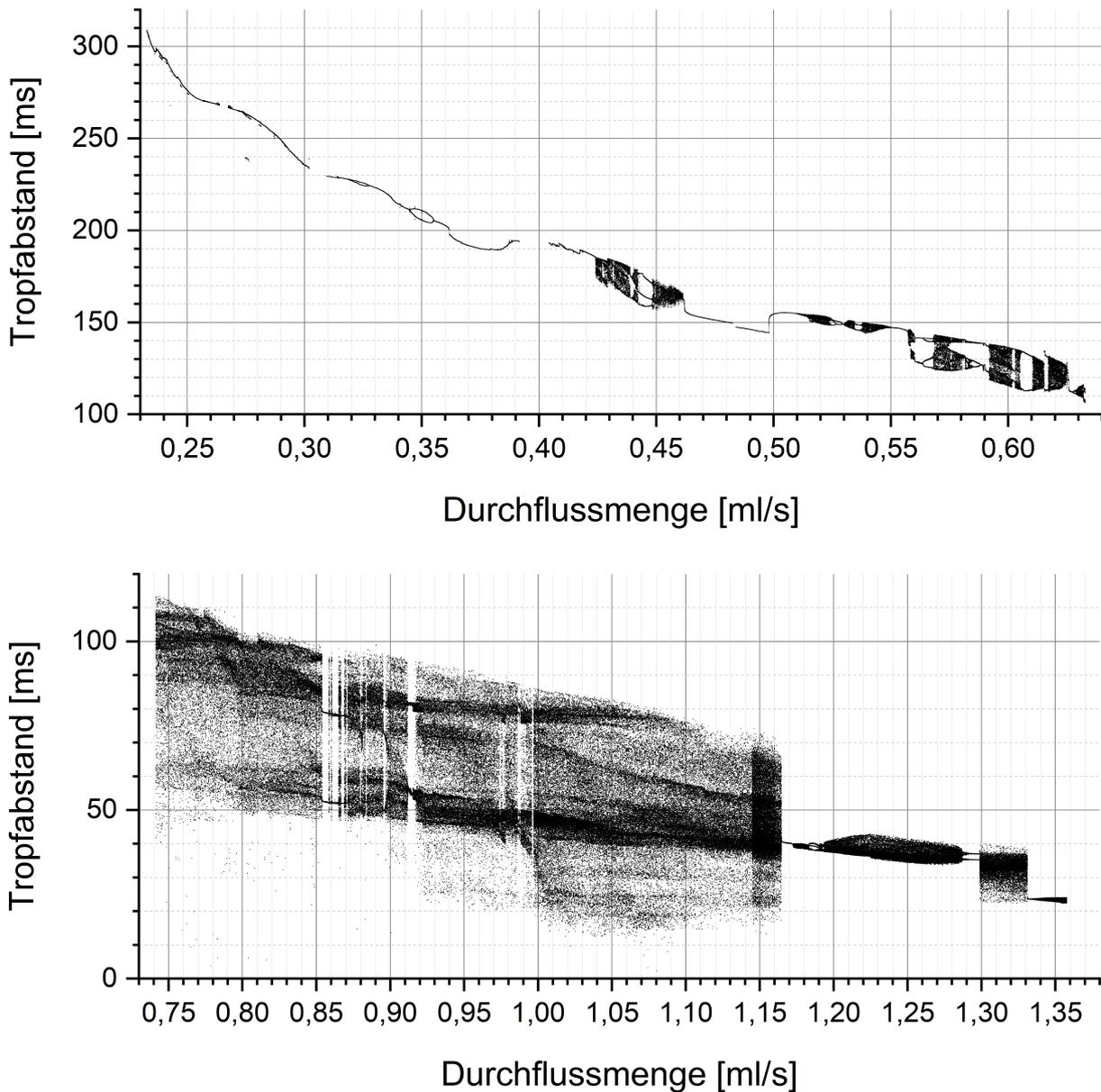


Abbildung 5.6: Tropfdiagramm für Spitze 2 (s. Tab. 4.1) über einen weiten Bereich an Durchflussmengen (Daten enthalten kleine Lücken aufgrund nötiger Messunterbrechungen zum Zwischenspeichern; bei $1,145 \text{ ml/s} < Q < 1,165 \text{ ml/s}$ überlappen sich die Daten zweier Messdateien, ohne dass am System bewusste Änderungen vorgenommen wurden – eventuell hat sich ein in der Schlauchklemme verfangener kleiner Fremdkörper während der Messunterbrechung gelöst, wodurch die eigentlich schon abgesunkene Durchflussmenge nochmals schlagartig angestiegen ist)

Diagramme von Spitze 3 wurden nicht angefertigt. Denn diese enthalten in vielen Bereichen zwei oder mehr übereinanderliegende Äste aufgrund der teils großen und nicht sinnvoll auszublenkenden Satellitentropfen. Das führt zu anspruchsvolleren Ergebnissen, und wurde vor dem Hintergrund der Untersuchung des tropfenden Wasserhahns als ein Einstiegsversuch zu nichtlinearen Systemen verworfen.

In Abbildung 5.7 ist ein Vergleich des erhaltenen Tropfbildes für Messung bei ansteigender bzw. abnehmender Durchflussmenge zu sehen. Dieser liefert vier zentrale Erkenntnisse: (a) Die Systemdynamik beider Messungen ist sehr ähnlich. Diese Tatsache belegt exemplarisch die Reproduzierbarkeit von Ergebnissen unter dem gewählten Aufbau³⁷ und die Zuverlässigkeit der Art der Berechnung der Durchflussmengen³⁸. Die Systemdynamiken sind jedoch nicht identisch, denn: (b) Durch (geringe, externe) Störungen zeigen sich im Vergleich Bereiche von Bi- oder Multistabilitäten. In Abbildung 5.7 sind ein paar dieser Bereiche mit Pfeilen gekennzeichnet. (c) Es sind Hystereseeffekte beobachtbar, die sich in lokal eng begrenzten Verschiebungen oder Abweichungen der Graphen äußern. So finden manche Bifurkationen bei leicht versetzten Durchflussmengen statt. Besonders deutlich wird dies beispielsweise im Bereich $0,42 \text{ ml/s} \leq Q \leq 0,43 \text{ ml/s}$: Für Messung bei zunehmender Durchflussmenge steigen dort die Tropfabstände plötzlich sprunghaft an, während

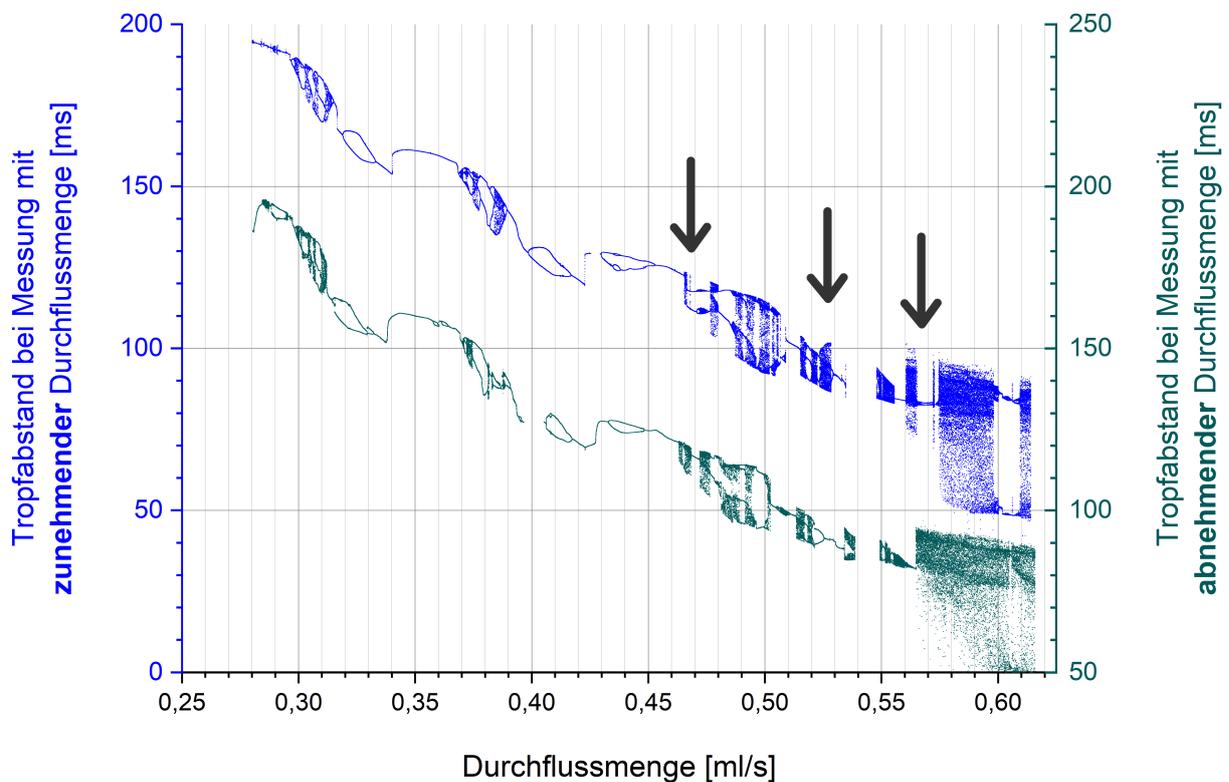


Abbildung 5.7: Vergleich der beobachtbaren Systemdynamik für Messung bei abnehmender bzw. zunehmender Durchflussmenge (Spitze 1); Pfeile markieren Bereiche bi- bzw. multistabilen Verhaltens

³⁷Natürlich wurden für den präsentierten Versuchsaufbau diverse Messungen unter identischen Bedingungen für verschiedene Bereiche von Fließgeschwindigkeiten vorgenommen, um die Reproduzierbarkeit von Ergebnissen zu untersuchen. Hierbei fanden sich *stets* sehr gute Übereinstimmungen, auch für eher instabile Regime. Wäre dies nicht der Fall, wäre der Aufbau für quantitative Untersuchungen völlig ungeeignet.

³⁸Ansonsten wäre eine merkliche Verschiebung beider Diagramme gegeneinander zu beobachten. Eine (scheinbar) teils vorhandene leichte Verschiebung kann auf (c) zurückgeführt werden.

dies bei Messung unter abnehmender Durchflussmenge nicht der Fall ist. Das könnte auf eine hysteresebedingte schlagartige qualitative Änderung im Tropfenbildungsprozess hinweisen. Es folgt also: (d) Die Bildung von sehr kleinen Satellitentropfen kann bei Über- oder Unterschreiten eines kritischen Wertes der Durchflussmenge unvermittelt auftreten oder ausbleiben. Die Satellitentropfen können (wie hier) klein genug sein, um nicht durch die Lichtschranke detektiert zu werden, verändern aber in jedem Fall die Zeitabstände der regulären Tropfen.³⁹ Ein weiteres Beispiel hierfür ist in Abbildung A.30 im Anhang zu finden.

Ein vergrößerter Ausschnitt des Tropfverhaltens von Spitze 1 bei niedrigen Fließgeschwindigkeiten (siehe Abbildung A.29) lässt ein sich wiederholendes Muster erkennen. Hierbei könnte es sich um ein komplexes Beispiel der in Kapitel 3.2.2 diskutierten unit structures handeln.⁴⁰

Auf beobachtbares Übergangsverhalten und Attraktoren wird im nachfolgenden Kapitel ein detaillierterer Blick gerichtet.

5.3.4. Übergangsverhalten und Attraktoren

Die in anderen Veröffentlichungen häufig beschriebenen Wege ins Chaos durch Feigenbaum-Routen, Intermittenz und einer Überlagerung beider lassen sich auch in den hier erhobenen Daten finden. Ein Bereich, in dem Übergänge zwischen periodischem und chaotischem Verhalten ausschließlich über Periodenverdoppelungskaskaden stattfinden, ist in Abbildung 5.9 zu sehen. Aufspaltungen bis zu Vierer-Perioden sind an vielen Stellen sehr deutlich erkennbar, Achter-Perioden sind instabil und – wenn überhaupt – nur für sehr kleine Abschnitte beobachtbar.

Immer häufiger werdende Unterbrechungen periodischer Dynamik durch Bereiche chaotischer Dynamik, wie sie für Übergänge durch Intermittenz charakteristisch sind, sind ebenfalls in den erhaltenen Daten auffindbar. Allerdings besitzen sie eine deutlich weniger feingliedrige Struktur als andernorts berichtet,

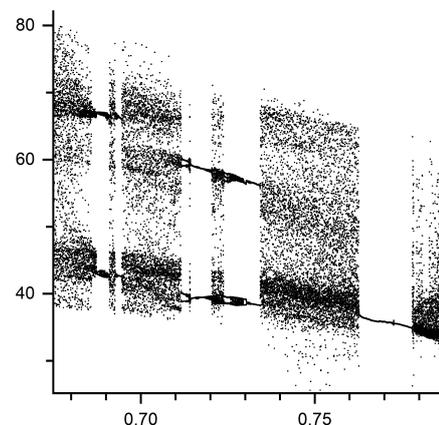


Abbildung 5.8: Intermittenz und/oder Attraktorkrisen (Spitze 1)

³⁹Passend dazu findet sich bei Dreyer & Hickey 1991, S. 624 die Beobachtung, dass plötzliche Veränderungen im Volumen der Satellitentropfen auftreten oder sie ganz ausbleiben können, was beides zu einer sprunghaften Änderung in den Tropfabständen führe. Diese Tatsache muss also bei der Interpretation von Tropfdiagrammen stets berücksichtigt werden.

⁴⁰Eine Messung für noch niedrigere Fließgeschwindigkeiten könnte diese Vermutung bestätigen.

und das an sich typische Verhalten zunehmend breiter werdender Bereiche ist nicht wirklich erkennbar (vgl. Kap. 3.2.2). Abbildung 5.8 zeigt ein – für den im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Aufbau an vielen Stellen beobachtbares – Verhalten, das intermittente Eigenschaften besitzt. (Für noch niedrigere Durchflussmengen als abgebildet schließt sich ein sehr breiter, durchgehend chaotischer Bereich an.) Gleichzeitig treten aber auch (sehr feine) Periodenverdoppelungen durch Bifurkationen auf.

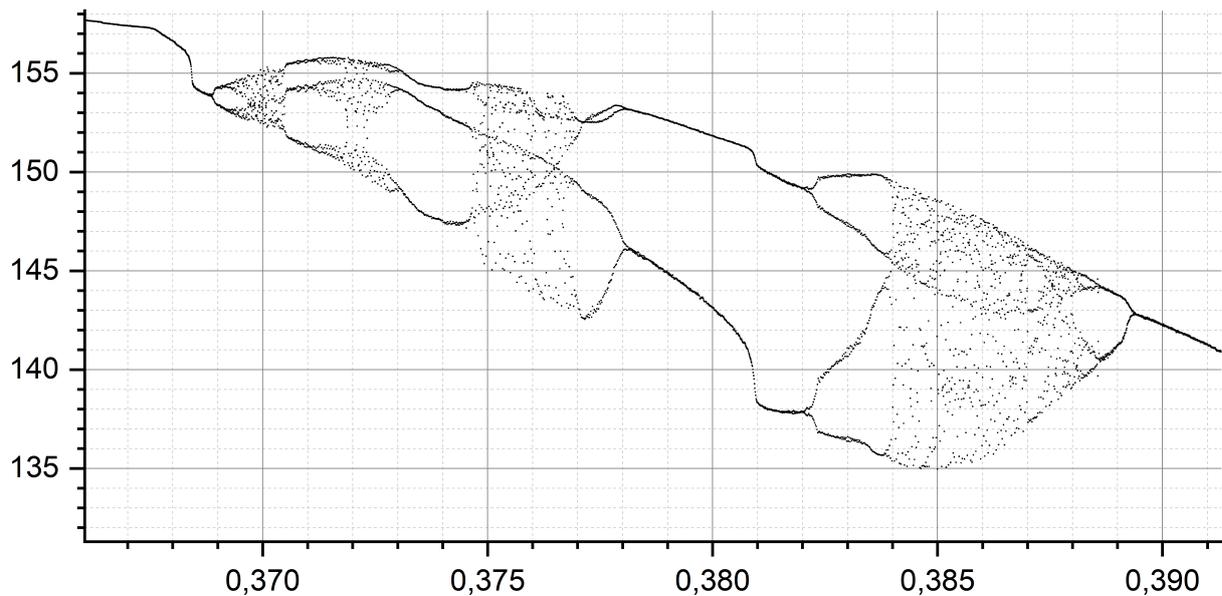


Abbildung 5.9: Übergänge zwischen periodischen und chaotischen Regimen durch Periodenverdopplungen (Spitze 1; Messung bei ansteigender Durchflussmenge)

Innerhalb vieler chaotischer Bereiche finden sich Fenster höherperiodischen Verhaltens. Häufig handelt es sich dabei um Dreier-Perioden, die bei vielen nichtlinearen Systemen innerhalb von chaotischen Regimen auffindbar sind. Drei solche Fälle sind in Abbildung 5.10 zu sehen.

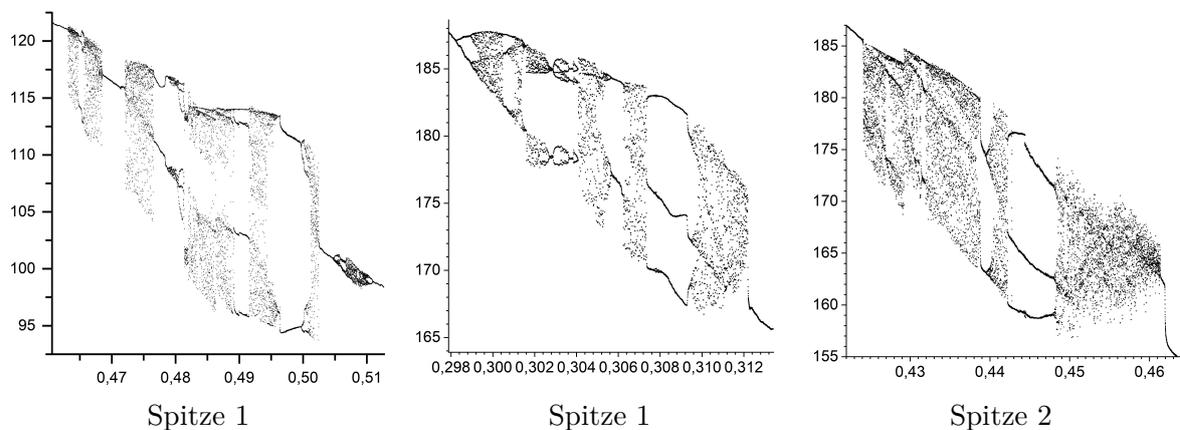


Abbildung 5.10: Fenster regulären Verhaltens innerhalb von chaotischen Regimen

Plötzliche Änderungen zwischen regulärer und chaotischer Dynamik können, wie in Kapitel 2.3 erläutert, zwei verschiedene Ursachen haben. Entweder kann das System Bi- oder Multistabilitäten aufweisen und eine kleine externe Störung erfahren haben (das wurde oben bereits genauer beleuchtet – siehe Kapitel 5.3.3), oder es kommt zur Attraktorkrise. Für letztere gibt es mehrere Möglichkeiten: Beispielsweise kann sich ein seltsamer Attraktor (über einen kleinen Bereich hin) zu einem regulären Attraktor verändern (s. auch Abb. 3.9), wodurch o. g. Fenster in chaotischen Regimen entstehen könnten. Dies erscheint plausibel, da im Punktediagramm 5.10 in den chaotischen Bereichen teils Strukturen erkennbar sind, die sich zu den Anfangs- bzw. Endpunkten der periodischen Diagrammäste hin verdichten. Ähnliches ist in Abbildung A.27 zu beobachten. Weiterhin könnte ein seltsamer Attraktor plötzlich vernichtet werden, und das System gerät in den Einzugsbereich eines anderen, periodischen Attraktors. Eine solche boundary crisis dürfte beispielsweise für die abrupten Übergänge in Abbildung 5.6 für $Q > 1,15$ ml/s verantwortlich sein.⁴¹

Zur weiteren Untersuchung der Systemdynamik und vor allem zur genaueren Charakterisierung seltsamer Attraktoren bieten sich Return-Maps an (s. Kap. 2.5). Die zeitdiskrete Messung der Tropfzeiten entspricht hierbei bereits einem Poincaré-Schnitt. Für die vier in nebenstehender Abbildung 5.11 markierten Durchflussmengen wurden Return-Maps erstellt. Die periodischen Bereiche sind darin wie erwartet als diskrete Punkte zu sehen, wie Abbildung 5.12 zu entnehmen ist. Die Return-Map 5.13 links für den chaotischen Fall zeigt eine zusammenhängende Menge klarer Struktur, wie sie für einen geeigneten Schnitt für einen seltsamen Attraktor niedrigerer Dimension (d. h. eher einfacherer Struktur) typisch ist. Liegt die Schnittebene (bei diesem Versuch durch die Messung vorgegeben und nicht veränderbar) im Bezug auf einen Attraktor ungünstig wie in Abbildung 5.13 rechts, lassen sich keine Erkenntnisse über dessen Struktur gewinnen.

Die Return-Map eines Attraktors, die ein deutlich komplexeres Gebilde darstellt und daher eine eher höhere Dimension des Attraktors impliziert, ist in Abbildung 5.14 abgedruckt. Gleichzeitig wird dort demonstriert, dass die Darstellung der Daten in Return-

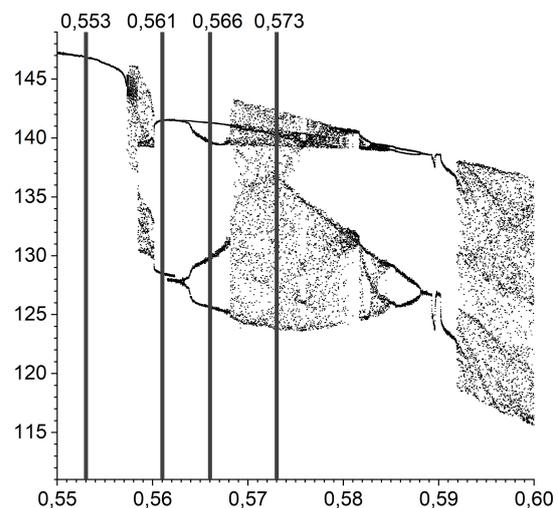


Abbildung 5.11: Ausschnitt des Tropfendiagramms für Spitze 2 mit markierten Stellen zur Darstellung in Return-Maps (s. Abb. 5.12)

⁴¹Boundary crisis wurde beispielsweise auch von Sartorelli et al. 1994 oder Sánchez-Ortiz & Salas-Brito 1995 berichtet.

Maps tatsächlich einen Erkenntnisgewinn liefert und kein zufälliges Gebilde darstellt: Die Messwerte von verschiedenen breiten Bereichen um den gleichen Wert der Durchflussmenge zeigen exakt dieselbe Struktur. Im Falle des breiteren Bereichs sind die Strukturen in der Abbildung lediglich kräftiger zu erkennen, da mehr Datenpunkte geplottet wurden.

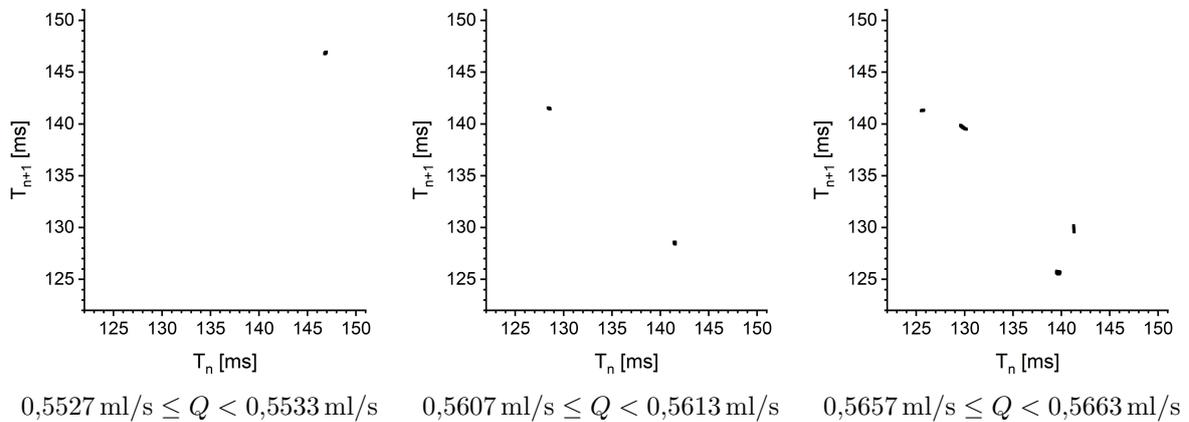


Abbildung 5.12: 1er, 2er und 4er-Periode dargestellt in Return-Maps für Spitze 2 (jeweils etwa 220 Datenpunkte); siehe zugehöriges Tropfdiagramm 5.11

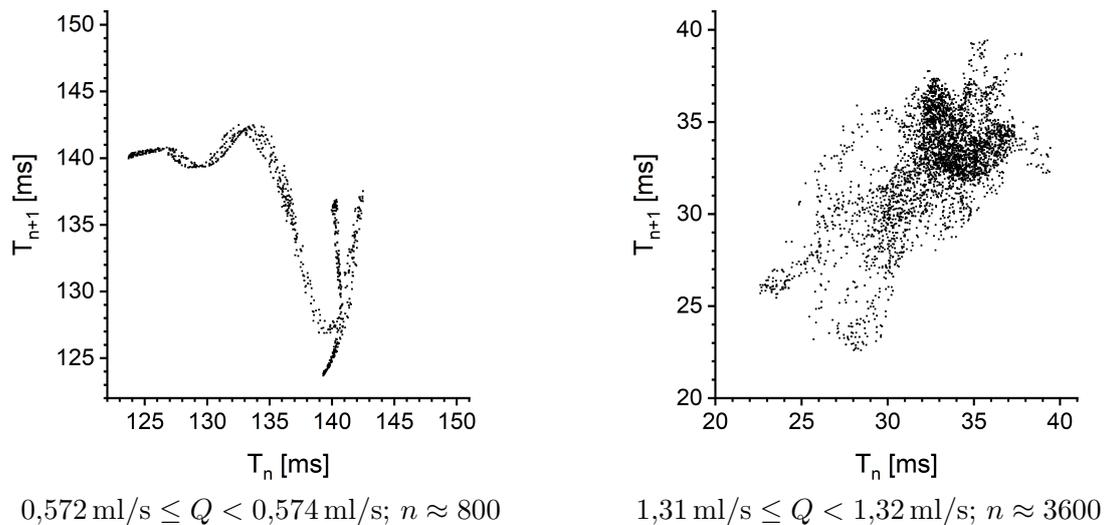
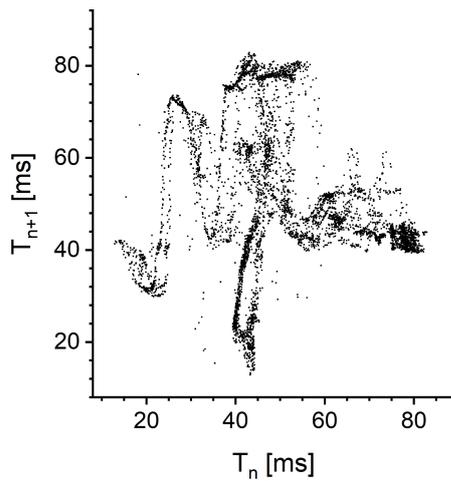
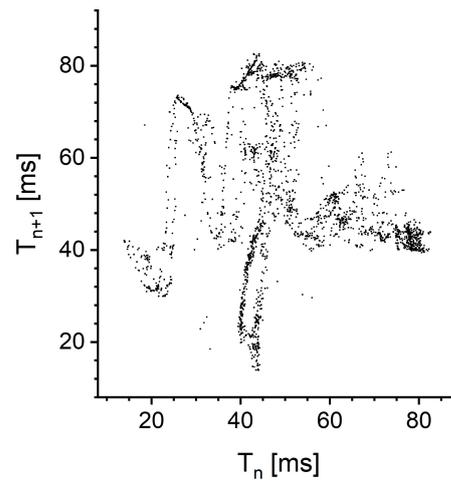


Abbildung 5.13: Darstellung zweier Bereiche chaotischen Verhaltens als Return-Maps: gut erkennbare Struktur eines seltsamen Attraktors (links) und ohne erkennbare Struktur (rechts) (jeweils Spitze 2)

Die Fülle der oben dargestellten und angesprochenen Beispiele zeigt, dass das System „tropfender Wasserhahn“ eine vielfältige und stark dynamische Attraktorenlandschaft aufweist, in der die jeweiligen Attraktoren (für nicht zu niedrige Fließgeschwindigkeiten) teils nur über kleinere Bereiche hinweg unverändert existieren. Dementsprechend viele Änderungen im Systemverhalten, multistabile Zonen und Attraktorkrisen sind zu erwarten – und wie oben ausgeführt auch zu beobachten.



$1,045 \text{ ml/s} \leq Q < 1,055 \text{ ml/s}; n \approx 5600$



$1,048 \text{ ml/s} \leq Q < 1,052 \text{ ml/s}; n \approx 2200$

Abbildung 5.14: Return-Maps um $Q = 1,050 \text{ ml/s}$ für zwei verschieden breite Bereiche (Spitze 2)

6. Potenzial und Grenzen des mit einfachen Mitteln durchgeführten Versuchs

Im vorangegangenen Kapitel 5.3 wird auf Basis der erhobenen Messdaten detailliert beschrieben und anhand vieler Abbildungen und Plots unterstrichen, wie reichhaltig das Systems „tropfender Wasserhahn“ an beobachtbaren nichtlinearen Phänomenen ist. Die nachfolgende Diskussion soll beleuchten, wie die Qualität der erhaltenen Ergebnisse – trotz der starken Vereinfachungen im Versuchsaufbau – einzuschätzen ist (Kapitel 6.1) und wie Potenzial und Grenzen einer Durchführung dieses Versuchs mit einfachen Mitteln im Hinblick auf Erkenntnisgewinn und Umsetzbarkeit in der Schule oder in universitären Studierendenpraktika zu beurteilen sind (Kapitel 6.2).

6.1. Qualität der erhaltenen Ergebnisse

Obwohl der hierfür verwendete Versuchsaufbau nur mit einfachen und breit verfügbaren Mitteln konzipiert ist, können viele, aus anderen Veröffentlichungen bekannte Eigenschaften (vgl. die Ausführungen in Kapitel 3) beobachtet und bestätigt werden: beispielsweise Periodenverdoppelungskaskaden und Intermittenz als Wege ins Chaos, verschiedene Formen von seltsamen Attraktoren und ihre Veränderungen in Form von Attraktorkrisen, sowie Bi- und Multistabilität, unit structure, Eigenschaften der Tropfenbildung (necking, Satellitentropfen, Oszillationen, Abhängigkeiten von der Spitzengeometrie) oder die starke Sensibilität bezüglich Störungen aus der Umgebung. Dies gelingt teils mit unerwartet gutem Detailgrad. Hierzu tragen die heutzutage einfach möglichen und sehr genauen Zeitmessungen per Lichtschranke ihr Übriges bei.

Nicht oder nicht gut hingegen lassen sich rein intermittente Übergänge (mit anfangs sehr schmalen und zunehmend breiteren chaotischen Ausbrüchen), Periodenaufspaltungen mit Periode acht und größer oder sehr eng umgrenzte, feinstrukturierte unit structures (wie z. B. in Abb. 3.10) erkennen. Da dies Phänomene sind, die nur innerhalb sehr, sehr kleiner Bereiche der Durchflussmenge auftreten, liegt die Vermutung nahe, dass der Ver-

suchsaufbau den hierfür benötigten Grad an Transientenfreiheit nicht erreicht. Störungen aufgrund kleinster Luftzirkulationen im Raum und Anwesenheit des Experimentators, sowie nicht vollends abgefangene Schwingungen durch das Aufprallen der Tropfen oder durch Bewegungen im Gebäude sind mögliche Ursachen. Gleichzeitig erscheinen eine zu schnelle Änderung der Fließgeschwindigkeit bezogen auf die hierfür zu betrachtenden kleinen Skalenbereiche sowie fehlende Temperaturkontrolle (welche schließlich nach Kapitel 3.2.5 ebenfalls einen Kontrollparameter des Systems darstellt) als weitere Störquellen plausibel. Noch dickere Schaumstoffpolsterungen und ein Wasserreservoir mit noch größerer Oberfläche stellen mögliche und einfach umzusetzende Gegenmaßnahmen dar. Die fehlende Temperaturkontrolle ist nicht ohne ungleich größeren Mehraufwand realisierbar.

Neben diesen kleinen Verbesserungen im Versuchsaufbau ließen sich durch zusätzliche Messungen an der ein oder anderen Stelle weitere Qualitätsgewinne in der Aussagekraft der Messergebnisse erzielen: Um beispielsweise instabiles Verhalten (System kann sich bei kleiner *externer* Störung stark verändern) eindeutig von Attraktorkrisen (System verändert sich *von alleine* stark) unterscheiden zu können, müssen entsprechende Stellen starker Veränderung mehrfach vermessen werden. Wenn sich so im Mittel Störeinflüsse als Ursache ausschließen lassen, ist das der Beleg für das Vorliegen von Attraktorkrisen. Oder um noch präziser abschätzen zu können, wie sehr die aus der Kraftmessung berechnete Durchflussmenge vom tatsächlichen Durchfluss abweicht, können zu gewissen Referenzzeitpunkten separate Volumenmessungen vorgenommen werden.⁴² Dabei kann man das Volumen (durch Wägung mit einer Präzisionswaage) bestimmen, das innerhalb genau einer Minute austropft. Unter der Annahme, dass sich die Fließgeschwindigkeit so langsam ändert, dass sie für diese Minute als konstant angenommen werden kann, erhält man einen sehr exakten Wert für die momentane Durchflussmenge. Neben diesen beiden Beispielen sind noch diverse weitere ergänzende Messungen zur Qualitätsverbesserung der Ergebnisse möglich. Damit bietet der so konzipierte Versuch also allein durch zusätzlich investierte Zeit (und insbesondere ohne dass Veränderungen am Aufbau nötig sind) die Möglichkeit, noch tiefergehendere und aussagekräftigere Erkenntnisse gewinnen zu können.

Zusammenfassend kann also festgehalten werden, dass mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Versuchsaufbau – im Vergleich zu andernorts veröffentlichten Berichten – gute Ergebnisse erhalten werden können.

⁴²In Kapitel 5.1 wurde bereits eine Größtfehlerabschätzung für den Fehler vorgenommen, der sich durch die Berechnung der Durchflussmenge aus der Kraftmessung ergibt. Diese Abschätzung zeigt, dass die Messungenauigkeit des verwendeten Kraftsensors im Vergleich dazu um Größenordnungen höher liegt und damit den entscheidenden Beitrag zum Gesamtfehler liefert. Erzeugt der Kraftsensor allerdings vor allem zufällige Fehler, dürften sich diese dank der vielen Einzelmesswerte und des Fits im Gesamten deutlich reduzieren. Kommt es im Wesentlichen zu systematischen Fehlern, korrigieren sich diese im Rahmen der Auswertung nicht – sind aber durch separate Untersuchungen bestimmbar.

Offen bleibt die Frage, wie es Buttkus et al. gelungen ist, eine Mariott'sche Flasche zum Aufrechterhalten konstanter Wasserhöhe zu verwenden, ohne durch die dabei unvermeidbare Luftblasenbildung in der Flasche dauerhafte Störungen im System zu verursachen. Trotz diverser Bemühungen diesbezüglich (vgl. Kap. 4.1.4) kann im Rahmen dieser Arbeit die gewinnbringende Verwendung einer Mariott'sche Flasche nicht bestätigt werden. Ebenso widersprechen die gewonnenen Erkenntnisse über Auswirkungen der Öffnungsweite der Spitze auf die Art und Weise der Tropfenbildung der von Buttkus et al. 1995 veröffentlichten Feststellung, dass „die Austropföffnung möglichst klein gewählt werden“ müsse, um zu erreichen „daß die Tropfenbildung nicht schon durch turbulent anströmendes Wassers in unkontrollierbarer Weise beeinflußt wird“. Vielmehr hat sich gezeigt, dass ein (zu) kleiner Spitzendurchmesser (und die dadurch verhältnismäßig hohe Fließgeschwindigkeit) dazu führt, dass Tropfen die Spitze häufig mit einer seitlichen Geschwindigkeitskomponente verlassen und damit dem Detektionsbereich der Lichtschranke entgehen (vgl. Kap. 5.3.1).

Nicht zuletzt gibt es keine best practice, wie mit Satellitentropfen umgegangen werden sollte. Während diese in manchen Veröffentlichungen bis zu einer gewissen, willkürlich gewählten Größe ausgeblendet werden, wird andernorts sorgfältig sichergestellt, dass alle Tropfen detektiert werden. Im Rahmen dieses Versuchsaufbaus scheint ein Ausblenden allzu kleiner Satellitentropfen aus zweierlei Gründen sinnvoll: Die erhaltenen Tropfdiagramme enthalten so nur einen Ast (wenngleich dieser Unstetigkeitsstellen bei spontanem Einsetzen oder Ausbleiben der Bildung von Satellitentropfen enthält, die entsprechend berücksichtigt werden müssen (vgl. Kap. 5.3.3)). Außerdem werden sehr kleine Tropfen nicht zuverlässig von üblichen Gabellichtschranken detektiert, weshalb ein Ausblenden *aller* sehr kleiner Tropfen konsequent erscheint. (Um dieses Problem zu lösen, könnte man die Detektion beispielsweise mittels Laser und Photozelle realisieren, deren Photostrom auf kleinste Abfälle hin überwacht werden muss. Das entspricht allerdings nicht dem Grundgedanken dieser Arbeit.)

6.2. Erkenntnisgewinn und Umsetzbarkeit im Unterrichts- und Praktikumskontext

Wie schon in der Einleitung thematisiert, spielen nichtlineare Systeme und Zusammenhänge eine entscheidende Rolle in Alltag und Umwelt. Um drängenden Fragen unserer Zeit (z. B. Klimawandel oder Bevölkerungswachstum) im wissenschaftlich-forschenden Kontext adäquat begegnen zu können, ist eine gute Kenntnis nichtlinearer Phänomene sowie die

Fähigkeit zur Modellierung chaotischer Dynamik⁴³ essentiell. Die konkrete Ausbildung entsprechender Kompetenzen muss und kann zwar nicht Aufgabe von Schulunterricht und grundständigem Hochschulstudium sein, wohl aber das Wecken eines Bewusstseins für nichtlineare Zusammenhänge und ihre Eigenschaften sowie das Bilden eines intuitiven Begriffsverständnisses. Dies gelingt sinnvollerweise durch eine geeignete Kombination aus theoretischen und praktischen Inhalten hierzu. Die Frage ist also, welche Versuche eignen sich als Einstiegsversuche zum Entdecken chaotischen Verhaltens? Sofern überhaupt nichtlineare Dynamik behandelt wird, geschieht dies sehr häufig am Beispiel eines Doppelpendels oder eines Pohl'schen Rades mit Zusatzmasse – also durch mechanische Oszillatoren. Beide Systeme bestechen durch ihre recht übersichtliche Phasenraumgestalt, sind verhältnismäßig unempfindlich gegenüber Störeinflüssen während einer Messung und hängen von wenigen veränderbaren Kontrollparametern ab. Gleichzeitig sind Lernende bereits mit ihren regulären Vertretern (physikalisches Pendel und Pohl'sches Rad ohne Zusatzmasse) vertraut. Diese vorangenannten Vorzüge kann man aber auch als nachteilig auffassen, denn: Ein bereits (fast) bekanntes System weckt weniger Neugier als etwas grundlegend Neues. Unempfindlichkeit bezüglich Störeinflüssen und wenige veränderbare Kontrollparameter veranlassen den Experimentierenden weniger dazu, erhaltene Ergebnisse kritisch auf ihre Qualität hin zu prüfen und gegebenenfalls durch eigene Optimierungen an Aufbau und Messung erkannte Störungen zu eliminieren. Eine übersichtliche Phasenraumgestalt schließlich bedeutet auch, dass nur ein kleiner Einblick in die Bandbreite nichtlinearer Phänomene möglich sein wird. All diesen Einwänden kann man durch Wahl des tropfenden Wasserhahns als (einen) Einstiegsversuch begegnen⁴⁴, der dabei zugleich als realitätsnäheres und deutlich weniger didaktisch reduziertes System zu verstehen ist.

Bevor konkreter auf mögliche Einsatzszenarien eingegangen wird, sei kurz die Praxis-tauglichkeit dieses Systems für Lernkontexte abgesteckt. Die in dieser Arbeit vorgestellte Realisierung ist zwar nicht im Handumdrehen aufgebaut, die dafür benötigte Zeit sollte sich aber in einem machbaren Rahmen bewegen. Am aufwändigsten dürfte das Ziehen der Spitze sein, falls nicht sowieso vorhanden (denn hierfür mag es etwas Übung benötigen), und das Anfertigen einer Halterung für das Austropfgefäß. Geht es nur um einen qualitativen und keinen quantitativen Einblick in das System, kann sogar die gesamte Kraftmessung weggelassen werden. Damit kann zwar zu Messungen des Tropfverhaltens keine Durchflussmenge mehr bestimmt werden, wodurch Ergebnisse nicht mehr vergleich-

⁴³Wie an vielen Stellen diskutiert ist eine Modellierung unter dem Anspruch einer präzisen Prognoseentwicklung nicht möglich. Dennoch lassen sich im Modell aber beispielsweise Stellen unerwarteten Systemverhaltens identifizieren, was ebenfalls viele Erkenntnisse bringt (man denke z. B. an Kippunkte im Zusammenhang mit dem Klimawandel).

⁴⁴Dies sei nicht als Wertung unterschiedlicher Zugänge zu nichtlinearer Dynamik zu verstehen. Jeder Zugang ist stets abhängig von Kontext und Zielsetzung, und muss individuell begründet werden.

bar sind, aber Tropfdiagramme und Return-Maps können für phänomenologische Zwecke dennoch erstellt werden. Trägt man die gemessenen Tropfabstände statt über der Durchflussmenge über der Zeit auf, ändert dies das erhaltene Diagramm nicht qualitativ. Es ist lediglich eine Streckung bzw. Stauchung gewisser Abschnitte des Tropfbildes entlang der Abszisse zu beobachten, da (wie in Kapitel 5 hergeleitet) ein exponentieller Zusammenhang zwischen Durchflussmenge und Messzeit besteht. Ebenso ist auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse der Bau einer Mariott'schen Flasche überflüssig.

Ein konkreter Einsatz des Versuchs „tropfender Wasserhahn“ in der Schule ist im Hinblick auf dessen naturbedingte Komplexität wohl auf die gymnasiale Oberstufe beschränkt. Hierbei steht das Entdecken nichtlinearer Phänomene und das Erforschen des nichtlinearen Charakters im Vordergrund. Das Präsentieren bzw. Erarbeiten entsprechend didaktisch reduzierter Erklärungen für einige Phänomene scheint möglich. Zwar ist es sicher sinnvoll und wünschenswert, erste Anknüpfungspunkte zu nichtlinearen Phänomenen auch in niedrigeren Klassenstufen herzustellen, hierfür bieten sich aber didaktisch deutlich stärker reduzierte Kontexte besser an. Innerhalb der Oberstufe sieht der derzeit noch gültige Lehrplan des achtjährigen Gymnasiums keine explizite Behandlung nichtlinearer Dynamiken vor, auch nicht im Profilbereich. Dank des Abwendens von einer Lernzielorientierung hin zu einer Kompetenzorientierung im neuen LehrplanPLUS ist jedoch unter gewissen Bedingungen die Behandlung des Versuchs möglich und auch sinnvoll. Ein denkbare Einsatzszenario wäre Folgendes: Der fertig aufgebaute Versuch wird als Demonstrationsexperiment vorgestellt und eine exemplarische Messung vorgenommen. Auch in wenig störungsarmer Umgebung wie einer Unterrichtsstunde sind zumindest Bereiche chaotischen und periodischen Tropfverhaltens beobachtbar. Dadurch ist ein erster Einblick in das nichtlineare Wesen des Systems erfahrbar. Anschließend wird, beispielsweise in Gruppenarbeit und bei geeigneter Begleitung, ein Satz vorbereiteter Messdaten über einen breiten Bereich an Fließgeschwindigkeiten wie in Kapitel 5.2 beschrieben computergestützt ausgewertet. Optional kann der funktionale Zusammenhang zwischen Durchflussmenge und Messzeit gemeinsam hergeleitet werden (vgl. Kap. 5). Ein Zusammenfassen der gruppenweise aufbereiteten Messdateien ergibt ein großes Tropfdiagramm, dessen Phänomene schließlich genauer untersucht und teils mit theoretischen Erklärungen versehen werden können. Abschließend werden der Einfluss externer Störungen und die Genauigkeit der berechneten Durchflussmenge diskutiert. Eine derart gestaltete Unterrichtssequenz fokussiert insbesondere die Kompetenzen S6⁴⁵, S7⁴⁶ und E7⁴⁷ der durch die Kultusministerkonferenz der Länder 2020 verbindlich beschlossenen *Bildungsstandards im*

⁴⁵Die Lernenden erklären bekannte Auswerteverfahren und wenden sie auf Messergebnisse an.

⁴⁶Die Lernenden wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an.

⁴⁷Die Lernenden berücksichtigen Messunsicherheiten und analysieren die Konsequenzen für die Interpretation des Ergebnisses.

Fach Physik für die Allgemeine Hochschulreife und transportiert mit besonderer Trennschärfe das ebenfalls dort festgesetzte Basiskonzept *Zufall und Determiniertheit*.

Davon abgesehen spricht natürlich nichts gegen den Einsatz des Versuchs im Schulunterricht, nachdem die für die jeweilige Jahrgangsstufe angedachten Inhalte behandelt und vor allem das Erreichen der vorgesehenen Kompetenzen sichergestellt wurden.

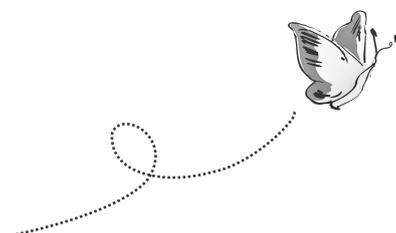
Auch im Rahmen eines Studierendenpraktikums kann der tropfende Wasserhahn ein sinnvoll einzusetzendes nichtlineares System darstellen. Gute Gründe sind sicherlich dessen oben erwähnte Reichhaltigkeit an nichtlinearen Phänomenen, die bei anderen Versuchen nicht immer so gut beobachtet werden können (z. B. verschiedene Formen der Attraktorkrise), oder dessen Andersartigkeit im Vergleich zu sonst häufig betrachteten mechanischen Oszillatoren. Werden als zwei wesentliche Bestandteile dieses Versuchs auch das konsequente Prüfen auf Störeinflüsse und das Vornehmen gegebenenfalls nötiger Optimierungen verstanden, fördert dies Fähigkeiten in praktischer experimenteller Physik. Da das System gleichzeitig aktiver Gegenstand von Forschung ist (bzw. es bis um die Jahrtausendwende war), bietet es sich an, Studierenden zur Vorbereitung ein oder zwei ausgewählte Veröffentlichungen bereitzustellen. Dies übt beiläufig den Umgang mit wissenschaftlichen Artikeln. Nicht zuletzt sind verschiedenste Grade der Fehlerdiskussion zu diesem Versuch denkbar. Dies wurde bereits im vorigen Kapitel 6.1 ausführlicher thematisiert.

Einschränkungen ergeben sich in diesem Kontext im Wesentlichen durch die zur Verfügung stehende Versuchszeit. Wird der Versuch von Praktikumsteilnehmenden selbst aufgebaut, muss dafür genügend Zeit eingeplant werden: Sind geeignete Spitzen (können kostengünstig beschafft werden) und die Hängevorrichtung für das Austropfgefäß bereits vorhanden, wird der grundsätzliche Aufbau nach Anleitung nicht allzu lange dauern. Auch Zeit für das Untersuchen auf Störungen und deren Beseitigung sowie ausreichend Zeit für die Messungen am System muss in der Planung berücksichtigt werden. Insgesamt sollten für den tropfenden Wasserhahn zwei Praktikumstage veranschlagt werden. Die zugehörige Auswertung der Daten ist ebenfalls verhältnismäßig aufwändig – sofern auch die Durchflussmenge werden soll. Dies kann alternativ, wie oben erläutert, weggelassen werden. Damit erhält der Versuch eine rein phänomenologische Orientierung, die aber nicht weniger anspruchsvoll sein muss.

7. Ausblick

Mit einem tropfenden Wasserhahn dürften sich viele schon einmal auseinandergesetzt haben (müssen). Vermutlich den wenigsten hat dabei die Überlegung, ob das Wasser periodisch oder chaotisch heraustropft, ob die einzelnen Tropfabstände vielleicht sogar eine Vierer-Periode beschreiben oder ob man durch beherztes Drehen mit der Rohrzange gerade eine ganze Landschaft seltsamer Attraktoren vernichtet hat, ein Lächeln ins Gesicht gezaubert. Und doch gibt es an einem auf den ersten Blick so simpel wirkenden System vieles zu entdecken – wie Kapitel 3 zum aktuellen Stand der Forschung und Kapitel 5 über die erhaltenen Ergebnisse unter Verwendung des hier vorgestellten einfachen Aufbaus zu entnehmen ist. Für alle, bei denen nun Interesse und Forschergeist geweckt sind, gibt es eine gute Nachricht: Mit dem gleichen einfachen Aufbau kann noch deutlich mehr untersucht werden. So wäre es interessant zu beobachten, welche konkreten Auswirkungen eine andere Wassertemperatur auf das Tropfverhalten hat (dazu könnte das Wasserreservoir beispielsweise mit Eiswürfelwasser befüllt werden), oder was die Zugabe von Salz oder Spülmittel zum Wasser bewirken. Denn sie verändern dessen Fluidparameter und damit ebenfalls die Systemdynamik. Mit einer ausführlichen Untersuchung des Einflusses der Spitze mittels einer systematischen Variation deren Geometrie dürfte man – auch im Hinblick auf veröffentlichte Forschungsergebnisse – Neuland betreten. Ebenso bieten auch die reinen Messdaten viele Möglichkeiten zum weitergehenden Erkunden: Trägt man in Return-Maps nur jeden zweiten Tropfabstand übereinander auf, können sich unter Umständen grundlegend andere Diagramme (für die geraden oder ungeraden Tropfen) ergeben (vgl. Martien et al. 1985). Weiterhin ist die Gestalt seltsamer Attraktoren mithilfe dreidimensionaler Return-Maps besser erkennbar, und es gibt Hinweise darauf, dass sich mit ihnen Bereiche quasiperiodischen Verhaltens finden lassen (vgl. Wu & Schelly 1989).

Diese Liste an Anstoßpunkten für weitergehende Untersuchungen ließe sich beliebig fortsetzen, und sagt damit vor allem das Eine: Nichtlineare Dynamik kann spannend und unerwartet, bei genauerer Betrachtung aber auch unerwartet logisch und vor allem sehr vielseitig sein! Oder – um im Bild des Schmetterlings zu bleiben: Manche Unwetter sind doch nicht so zufällig wie sie scheinen.



Literaturverzeichnis

- ARGYRIS, J., FAUST, G., HAASE, M. & FRIEDRICH, R. (2017): *Die Erforschung des Chaos – Dynamische Systeme*. Springer Vieweg.
- AUSTIN, J. (1991): *A mechanical treatment to the leaky faucet experiment*. In: Physical Letters A, **155(2,3)**: 148–155.
- BRIGGS, J. & PEAT, F. D. (1990): *Die Entdeckung des Chaos – eine Reise durch die Chaos-Theorie*. Carl Hanser Verlag, München Wien.
- BUTTKUS, B., SCHLICHTING, H. J. & NORDMEIER, V. (1995): *Tropfendes Wasser zwischen Ordnung und Chaos – Experimente zur nichtlinearen Dynamik*. In: Physik in der Schule, **33(2)**: 67–71.
- DREYER, K. & HICKEY, F. R. (1991): *The route to chaos in a dripping water faucet*. In: American Journal of Physics, **59(7)**: 619–627.
- FUCHIKAMI, N., ISHIOKA, S. & KIYONO, K. (1999): *Simulation of a Dripping Faucet*. In: Journal of the Physical Society of Japan, **68(4)**: 1185–1196.
- HAKEN, H. (1977): *Synergetics: A Workshop*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- HEISENBERG, W. (1969): *Der Teil und das Ganze: Gespräche im Umkreis der Atomphysik*. Piper, München.
- KATSUYAMA, T. & NAGATA, K. (1999): *Behavior of the Dripping Faucet over a Wide Range of the Flow Rate*. In: Journal of the Physical Society of Japan, **68(2)**: 396–400.
- KIYONO, K. & FUCHIKAMI, N. (1999): *Dripping Faucet Dynamics Clarified by an Improved Mass-Spring Model*. In: Journal of the Physical Society of Japan, **68(10)**: 3259–3270.
- LAPLACE, S. (1812): *Théorie Analytique des Probabilités*. Courcier, Paris.
- MARTIEN, P., POPE, S. C., SCOTT, P. L. & SHAW, R. S. (1985): *The chaotic behavior of the leaky faucet*. In: Physics Letters, **110A(7,8)**: 399–404.
- PLASCHKO, P. & BROD, K. (1995): *Nichtlineare Dynamik, Bifurkationen und Chaotische Systeme*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden.
- REITMANN, V. (1996): *Reguläre und chaotische Dynamik*. Teubner, Leipzig.
- SARTORELLI, J. C., GONÇALVES, W. M. & PINTO, R. D. (1994): *Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment*. In: PHYSICAL REVIEW E, **49(5)**: 3963–3975.

- SHAW, R. (1984): *The dripping faucet as a model chaotic system*. Aerial Press Inc., Santa Cruz, California.
- SÁNCHEZ-ORTIZ, G. I. & SALAS-BRITO, A. L. (1995): *Strange attractors in a relaxation oscillator model for the dripping water faucet*. In: Physics Letters A, **203**: 300–311.
- VOLLMER, G. (1988): *Ordnung ins Chaos? Zur Weltbildfunktion wissenschaftlicher Erkenntnis*. In: Naturwissenschaftliche Rundschau, **41(9)**: 345–350.
- WU, X. & SCHELLY, Z. A. (1989): *The effects of surface tension and temperature on the nonlinear dynamics of the dripping faucet*. In: Physica D, **40**: 433–443.
- YÉPEZ, H. N. N., BRITO, A. L. S., VARGAS, C. A. & VICENTE, L. A. (1989): *Chaos in a dripping faucet*. In: European Journal of Physics, **10**: 99–105.

A. Anhang

A.1. Graphiken zur Veranschaulichung der theoretischen Grundlagen

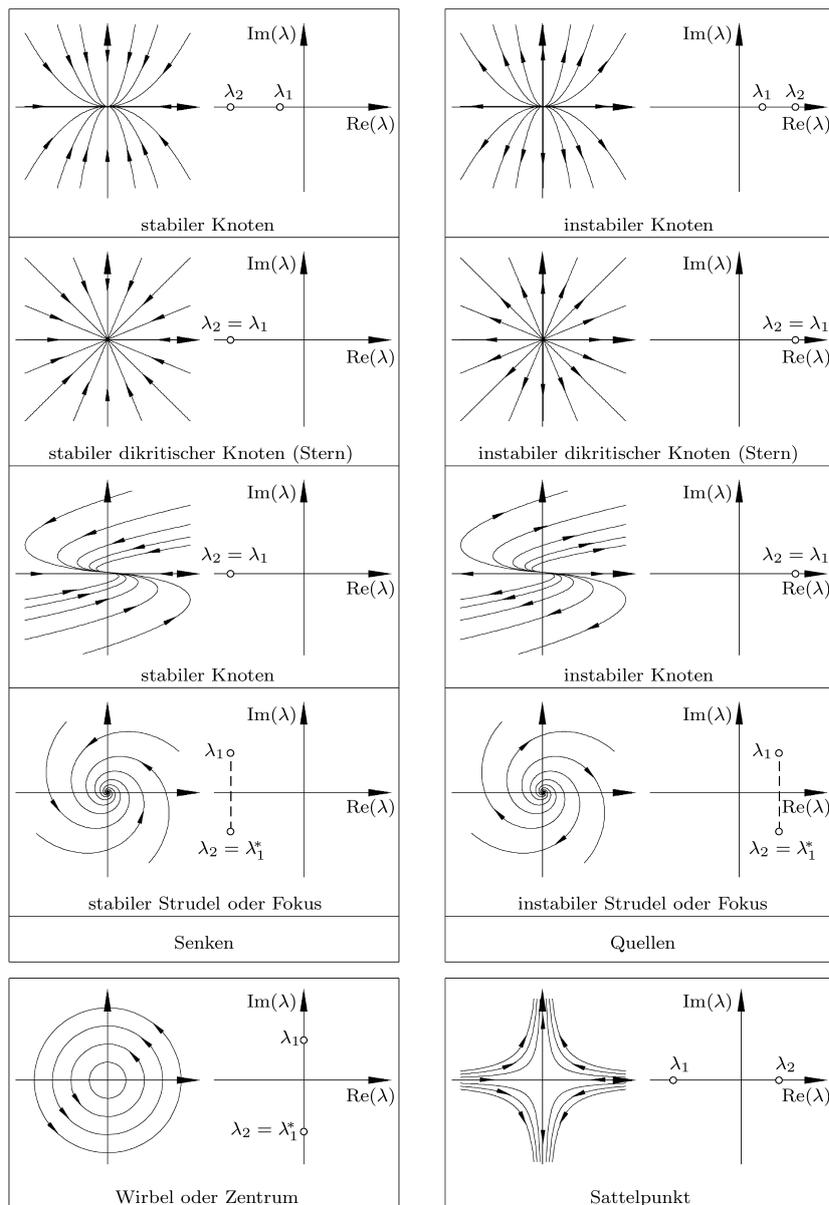


Abbildung A.1: Klassifikation des lokalen Stabilitätsverhaltens um Singularitäten in zwei Dimensionen [entnommen aus Argyris et al. 2017, S. 49]; λ_1, λ_2 bezeichnen die Eigenwerte der entsprechenden Jacobi-Matrix

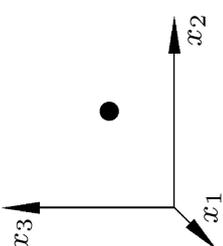
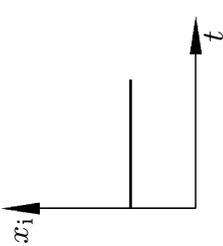
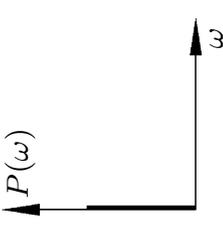
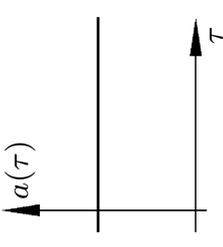
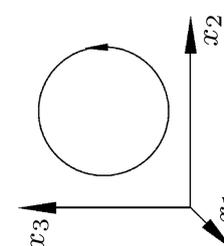
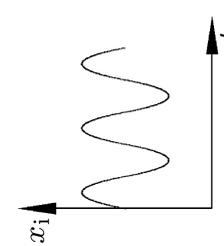
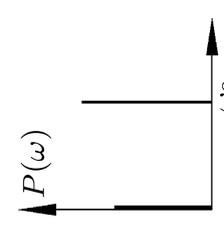
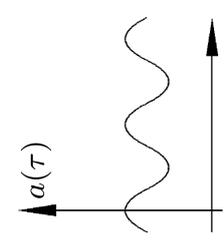
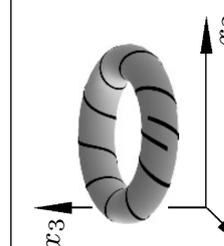
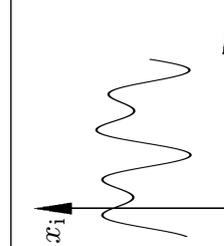
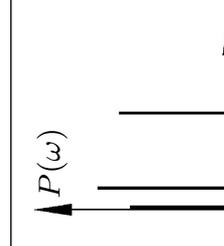
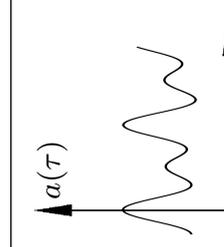
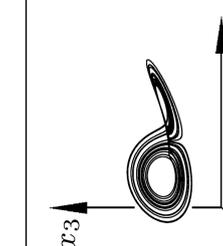
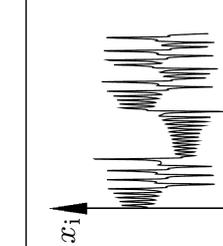
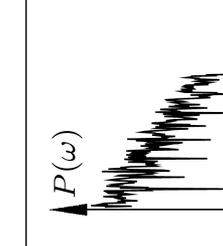
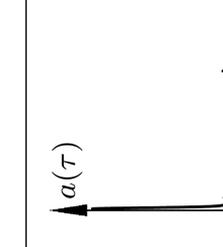
Phasen-Portrait	Zeit-Verlauf	Leistungs-Spektrum	Auto-Korrelation	Lyapunov-Exponenten	Dimension (z.B. D_c)
				- - -	0
				0 - -	1
				0 0 -	2
				+ 0 -	$2 < D_c < 3$

Abbildung A.2: Charakterisierung der Attraktortypen im dreidimensionalen Phasenraum [entnommen aus Argyris et al. 2017, S. 315]

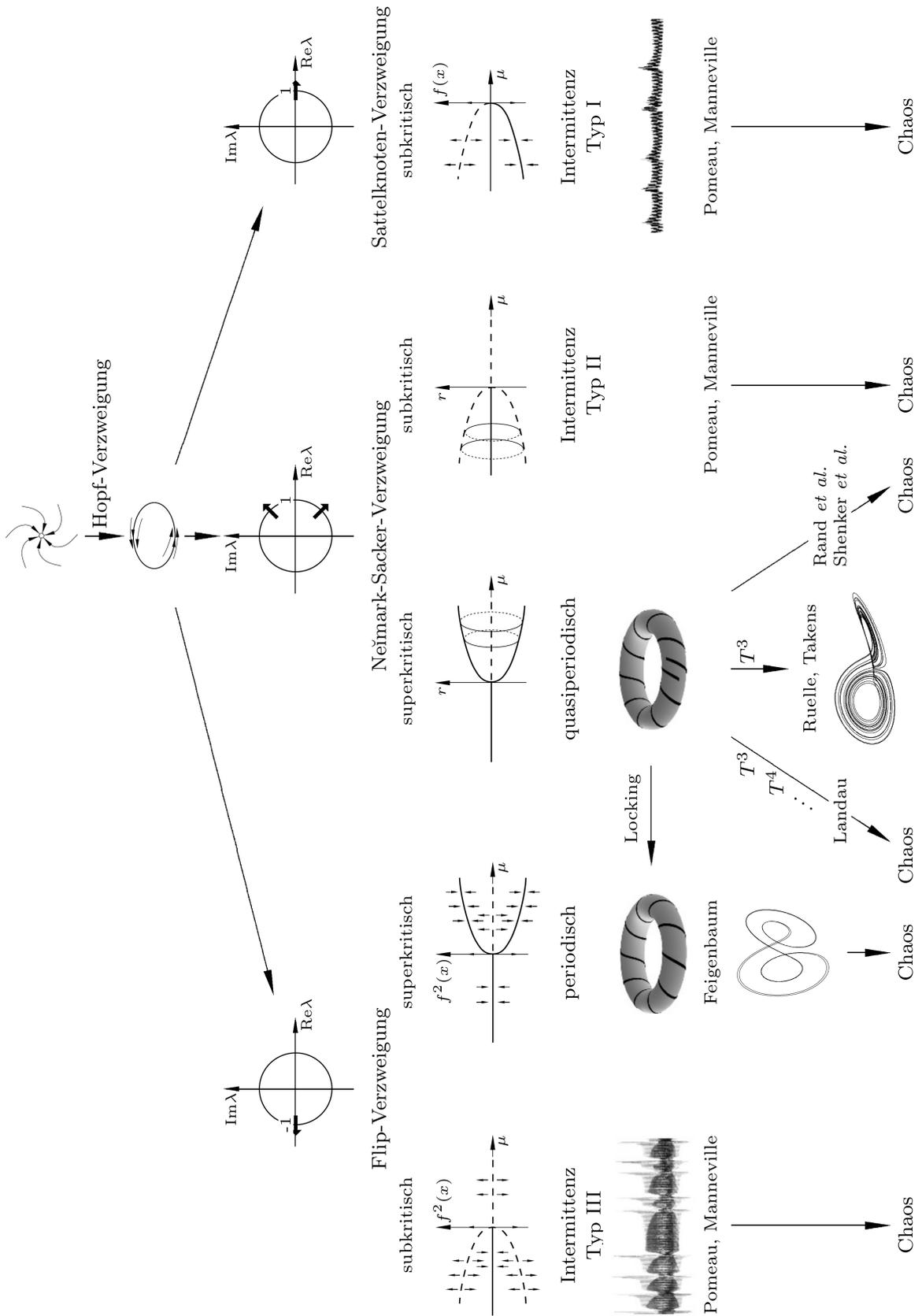


Abbildung A.3: Übersicht über mögliche Wege ins Chaos durch lokale Bifurkationen [entnommen aus Argyris et al. 2017, S. 607]

A.2. Weitere Abbildungen zu experimentellen Befunden in der Literatur

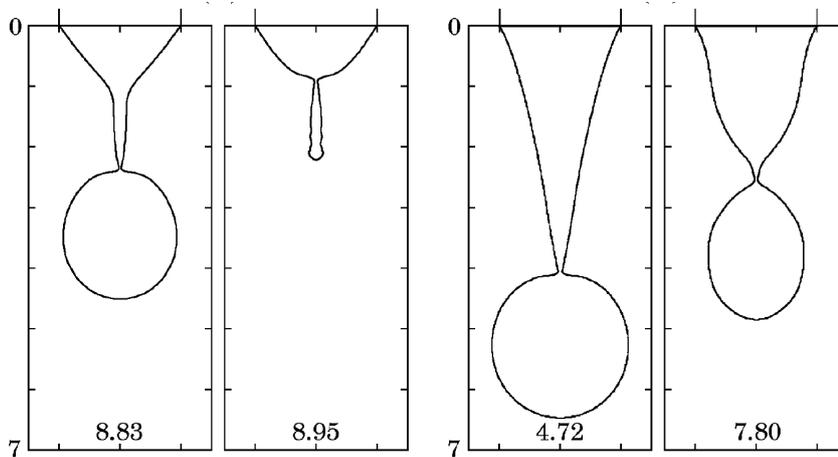


Abbildung A.4: auf Basis von experimentellen Befunden erstellte Simulation der Tropfenbildung: links für niedrige Fließgeschwindigkeit, rechts für 100-fach höhere Fließgeschwindigkeit (bei Fixierung aller anderen Systemparameter) [entnommen aus Fuchikami et al. 1999]

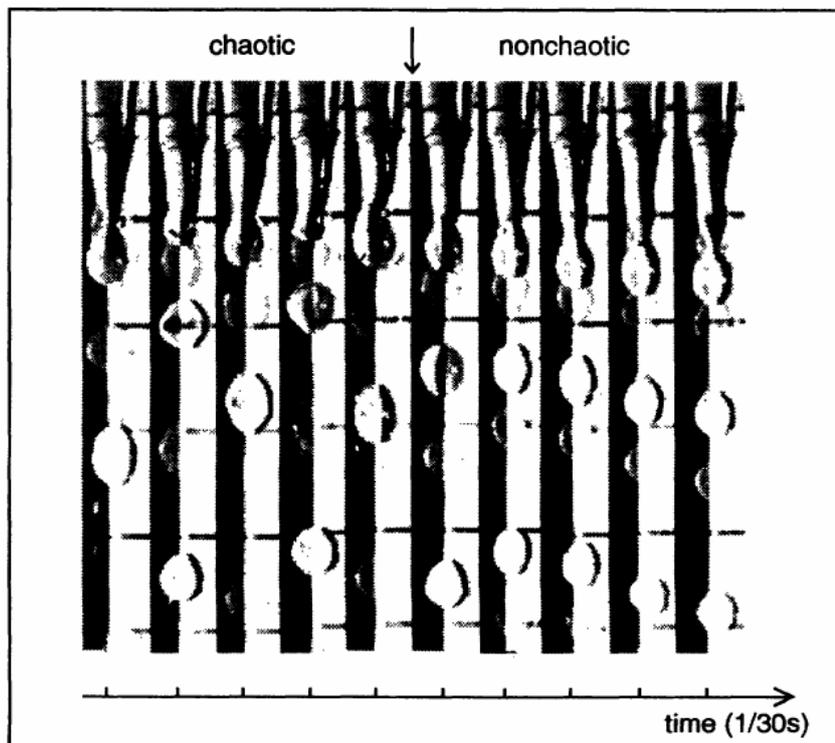


Abbildung A.5: stets unterschiedliche Ablösepositionen der Wassertropfen bei chaotischer Dynamik vs. feste Ablöseposition bei regulärem Systemverhalten [entnommen aus Sartorelli et al. 1994, S. 3969]

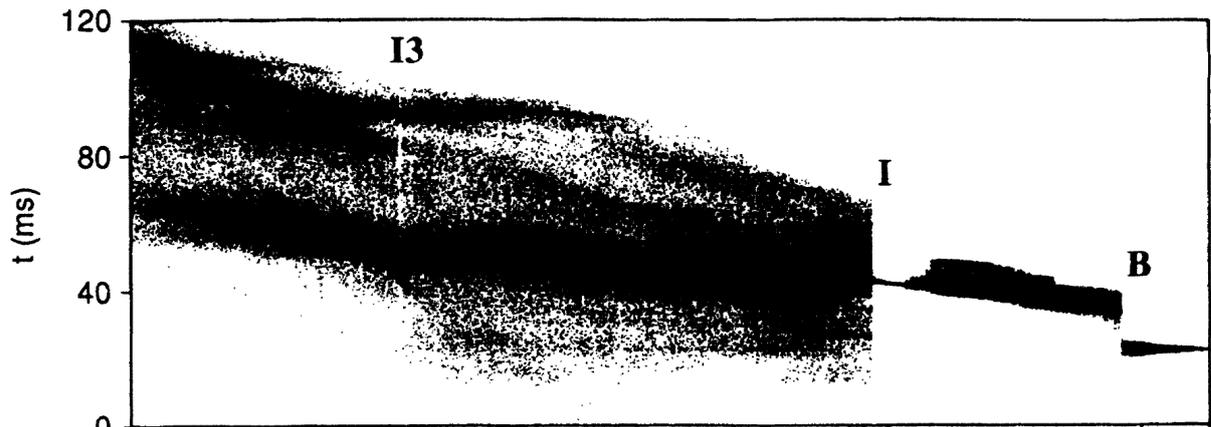


Abbildung A.6: Tropfdiagramm des tropfenden Wasserhahns: Tropfabstand aufgetragen über der Messzeit (Wasser, Raumtemperatur); Beginn (links) bei etwa 10 Tropfen/s, Ende bei etwa 40 Tropfen/s; periodisches Fenster bei I3 [entnommen aus Sartorelli et al. 1994, S. 3964]

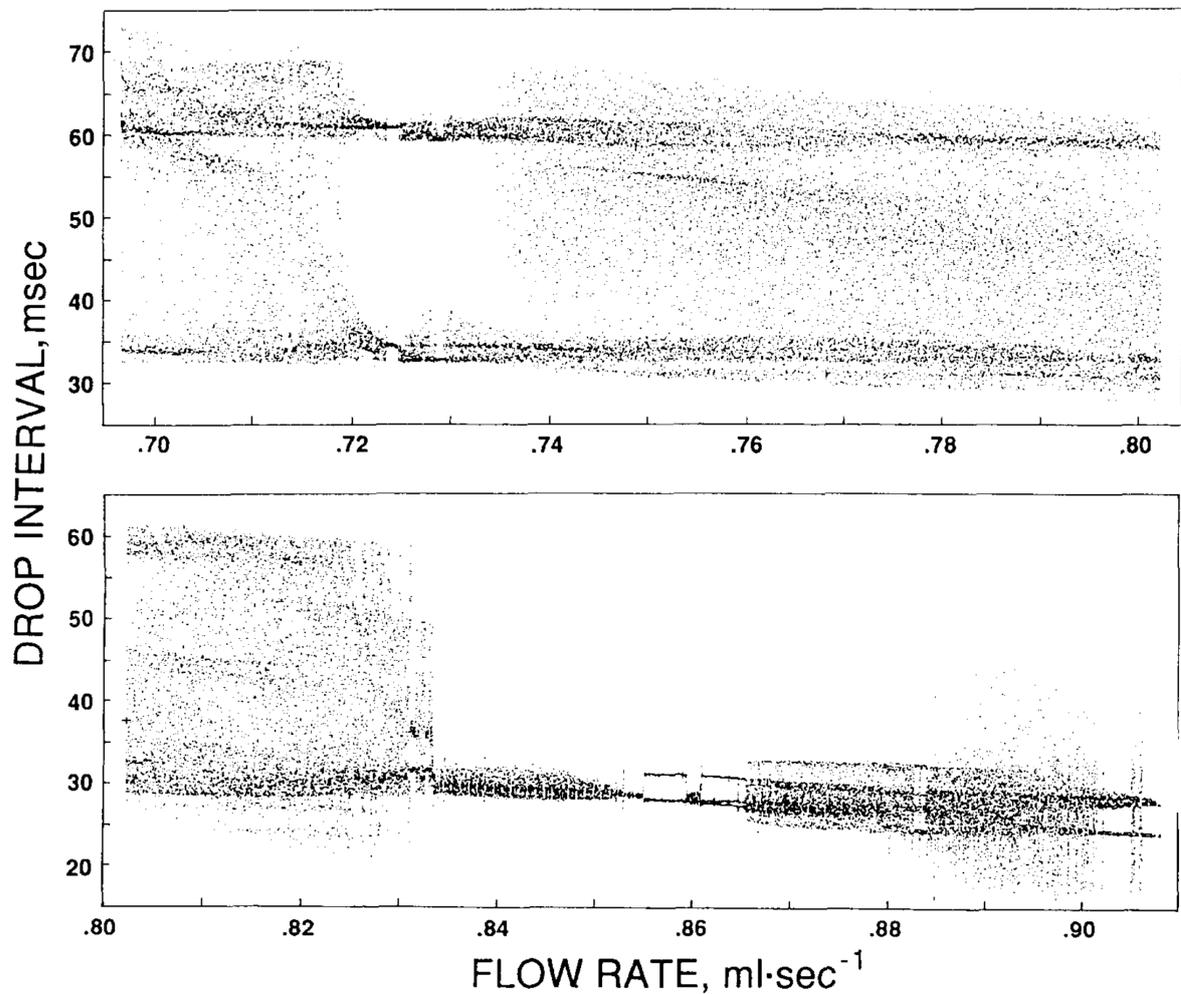


Abbildung A.7: Tropfabstand in Abhängigkeit von der Durchflussmenge (Wasser, 17°C) [entnommen aus Wu & Schelly 1989, S. 435]

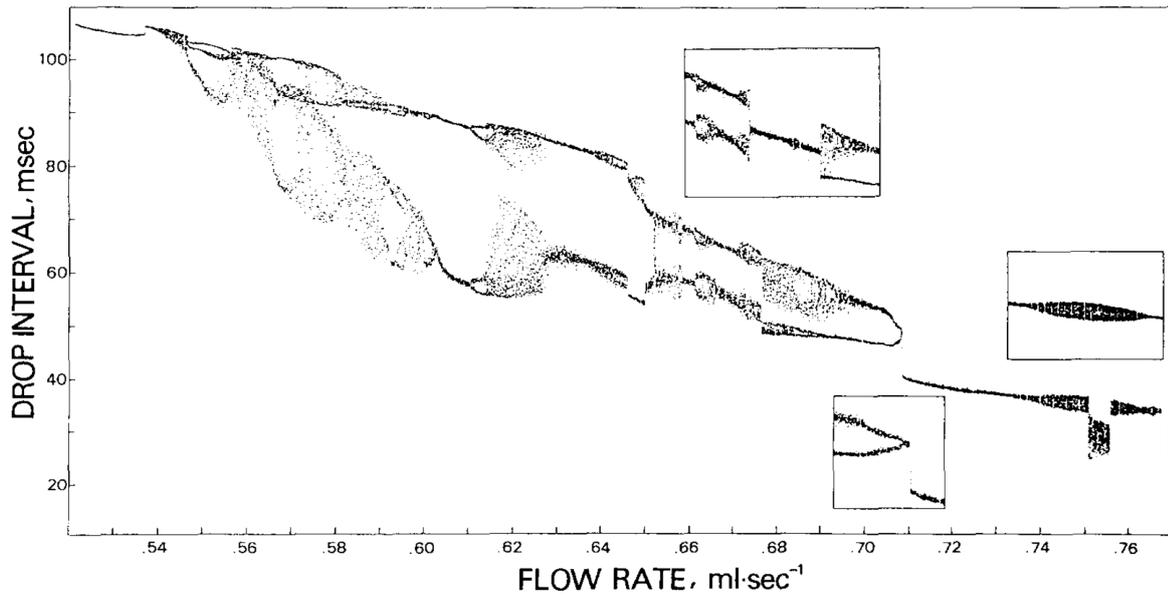


Abbildung A.8: Tropfspektrum mit Bereichen nichtperiodischen bistabilen und multistabilen Verhaltens (Natriumlaurylsulfat-Lösung, 23 °C)
[entnommen aus Wu & Schelly 1989, S. 437]

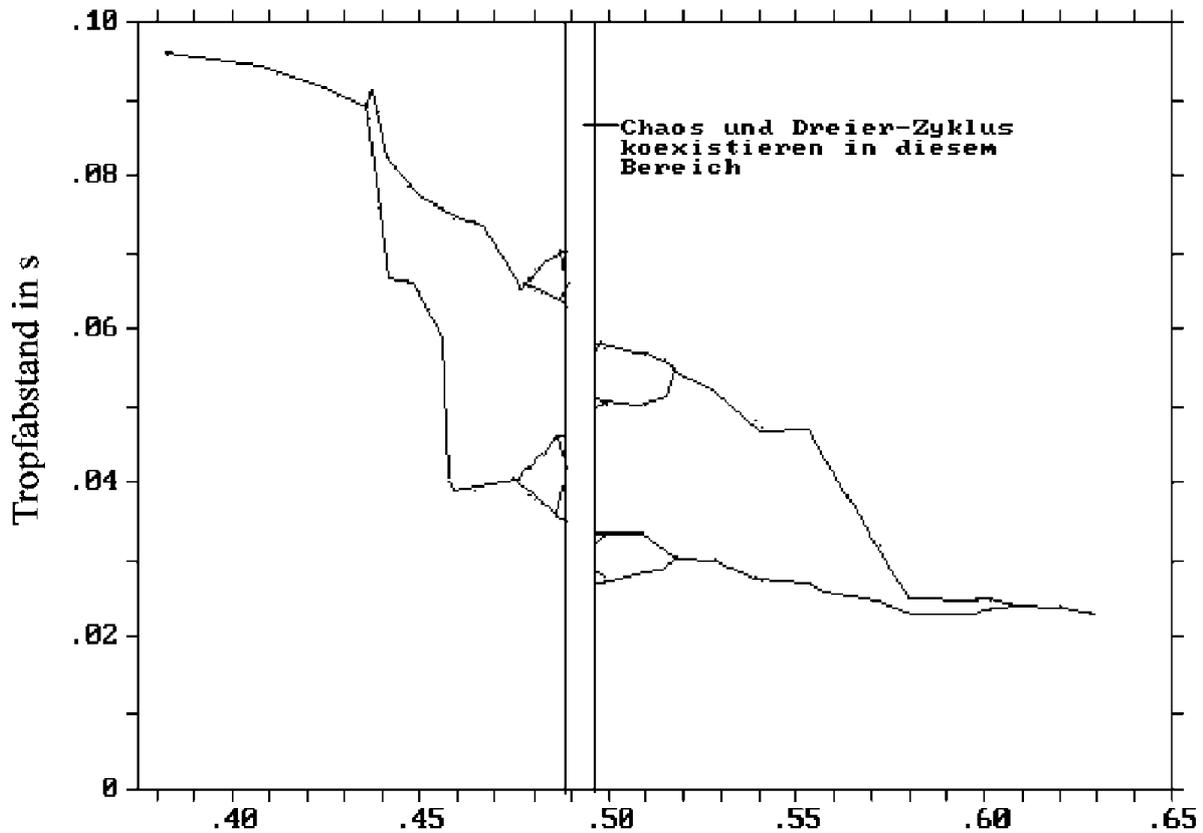


Abbildung A.9: Tropfabstand in Abhängigkeit von der Durchflussmenge (Wasser, Raumtemperatur) [entnommen aus Buttkus et al. 1995]

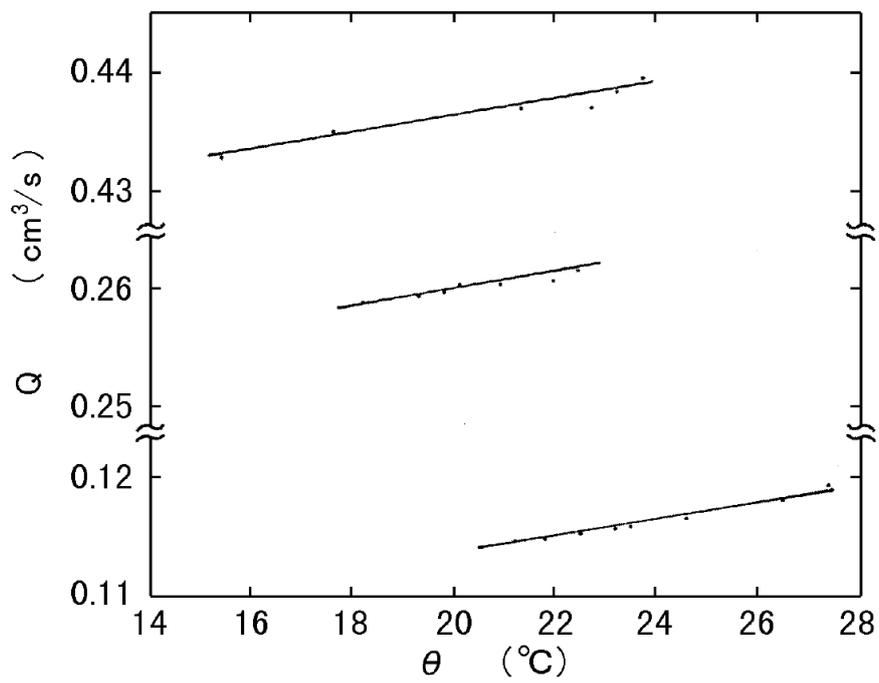


Abbildung A.10: Abhängigkeit der Durchflussmenge Q von der Temperatur ϑ für drei verschiedene Ventilstellungen. [entnommen aus Katsuyama & Nagata 1999]

A.3. Experimentelle Realisierungen des Systems „tropfender Wasserhahn“ in Veröffentlichungen

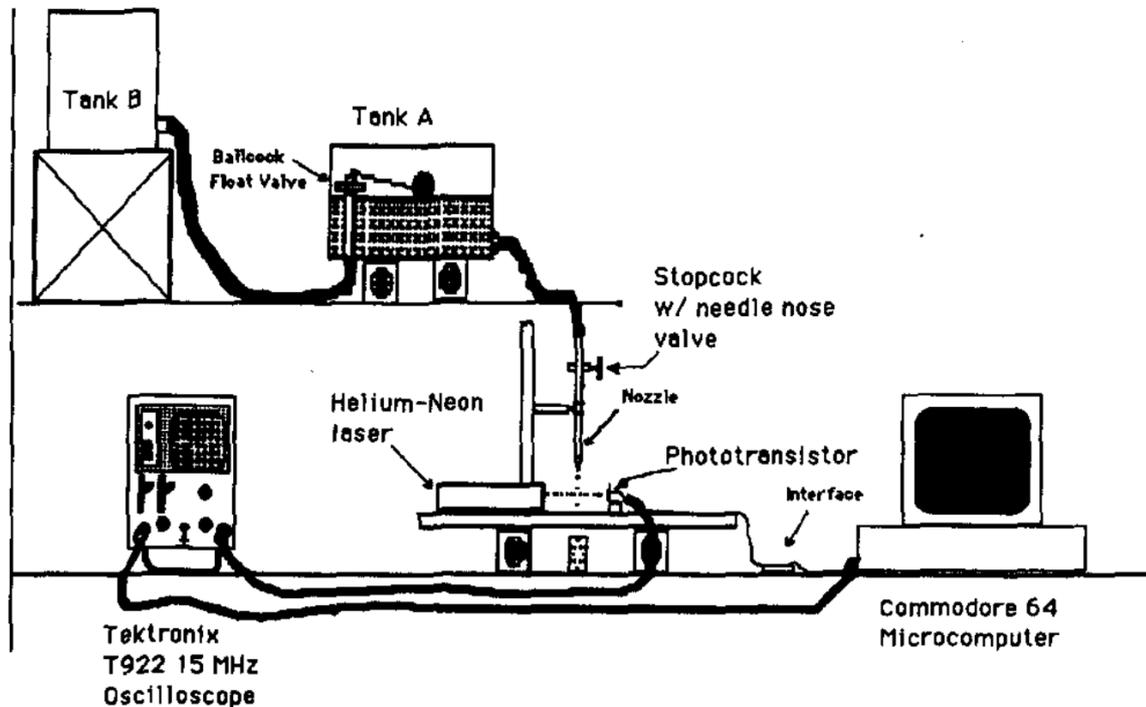


Abbildung A.11: Versuchsaufbau nach Dreyer & Hickey: Regelung der Wasserhöhe und damit des Wasserdrucks mittels Schwimmerventil; Regelung der Durchflussmenge an der Spitze mittels Nadelventil [entnommen aus Dreyer & Hickey 1991, S. 619]

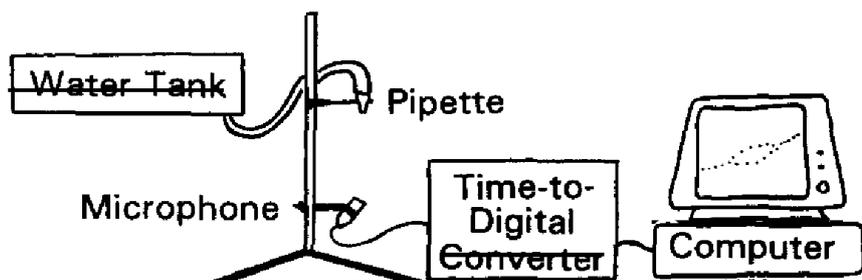


Abbildung A.12: Versuchsaufbau nach Austin: nicht für Messungen mit dauerhaft konstanter Durchflussrate konzipiert, sondern zur kontinuierlichen Vermessung von Fließgeschwindigkeitsbereichen; deshalb Wassertank mit sehr großer Oberfläche⁴⁸ zum Leertropfen lassen; kein Nachfluss von Wasser während der Messungen; keine zusätzliche Regelung der Durchflussmenge an der Spitze; Tropfendetektion mittels Mikrophon [entnommen aus Austin 1991, S. 148]

⁴⁸Das impliziert sich sehr langsam ändernde Fließgeschwindigkeiten.

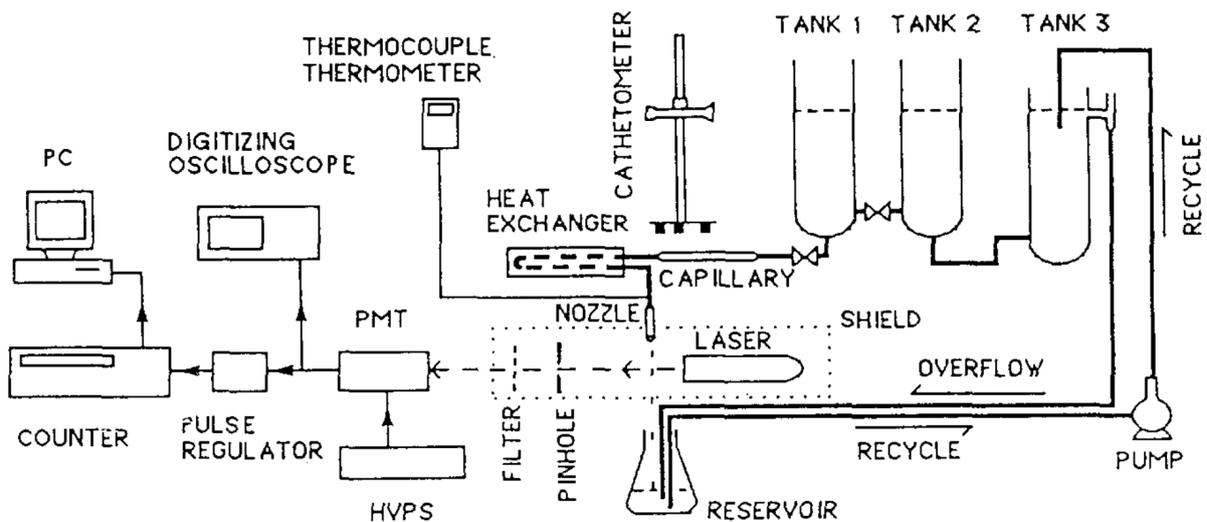


Abbildung A.13: Versuchsaufbau nach Wu & Schelly: dauerhafte Überwachung der Füllhöhe mittels Kathetometer und damit gesteuertes Zu- und Abfließen von Wasser aus Tank 3 über Höhenverstellung per Seilzug (nicht dargestellt) zur Wasserdruckregelung und zur *gleichzeitigen* Regelung der Durchflussmenge an der Spitze; Veränderung der Wassertemperatur mittels Thermoeminent möglich [entnommen aus Wu & Schelly 1989, S. 434]

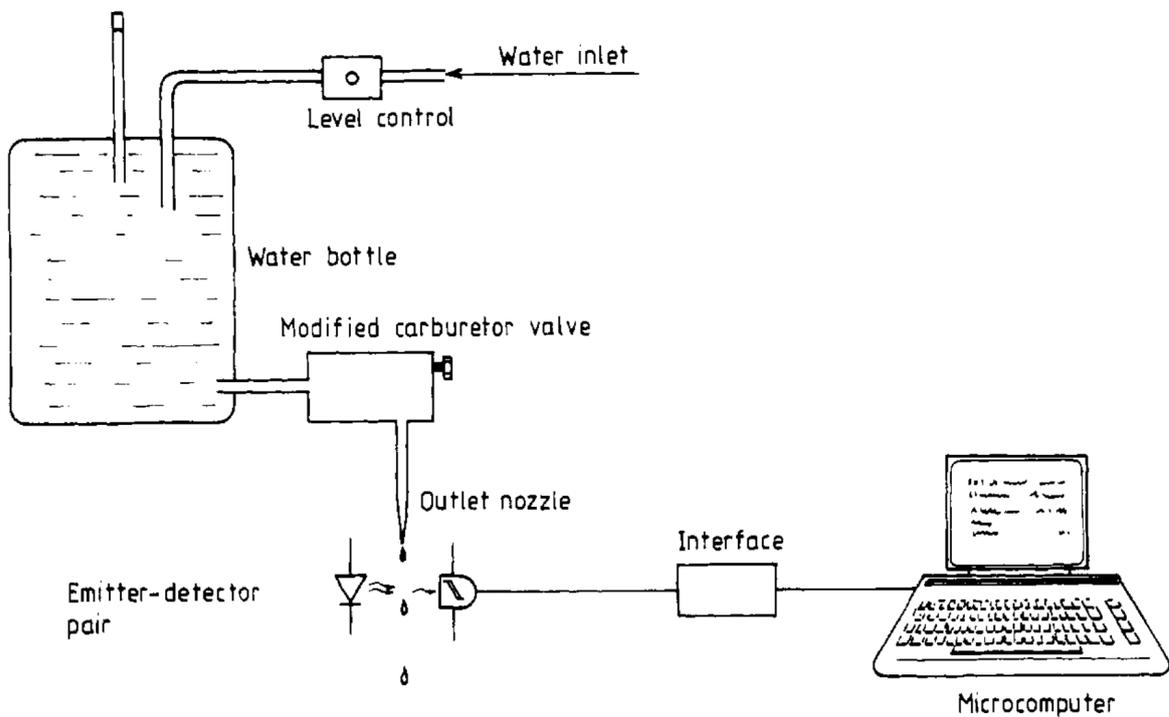


Abbildung A.14: Versuchsaufbau nach Yépez et al.: Regelung der Wasserhöhe und damit des Wasserdrucks mittels Kombination aus Schwimmventil und Mariott'scher Flasche; Regelung der Durchflussmenge an der Spitze mittels modifiziertem Vergaserventil [entnommen aus Yépez et al. 1989, S. 103]

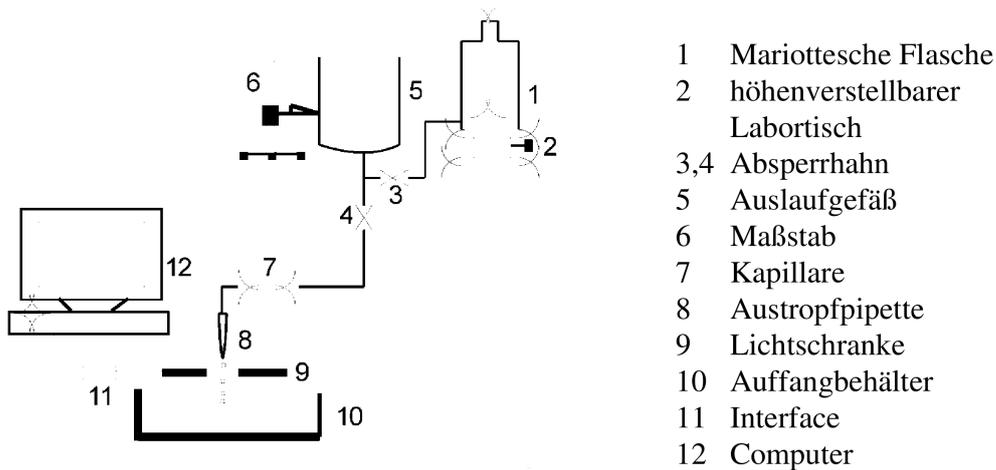


Abbildung A.15: Versuchsaufbau nach Buttkus et al.: Konstanthalten der Wasserhöhe und damit des Wasserdrucks mittels Mariott'scher Flasche; Regelung der Durchflussmenge an der Spitze mittels Variation der Wasserhöhe (Höhenverstellung der Mariott'schen Flasche) [entnommen aus Buttkus et al. 1995]

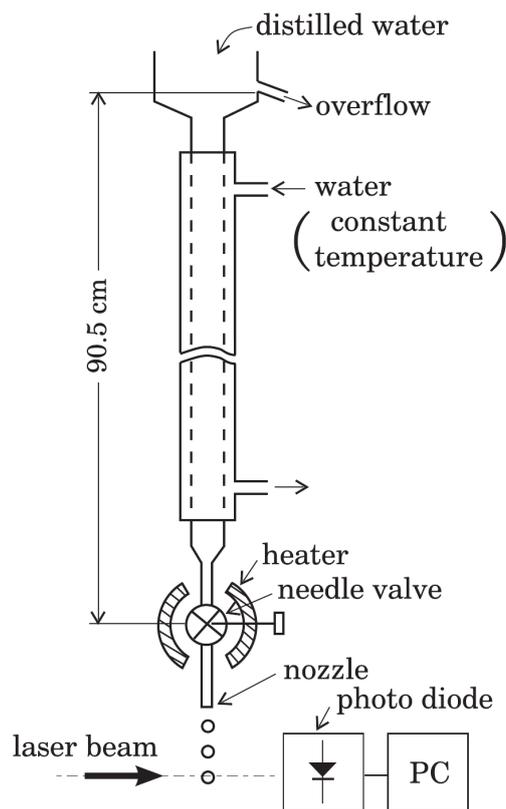


Abbildung A.16: Versuchsaufbau nach Katsuyama & Nagata: Konstanthalten der Wasserhöhe und damit des Wasserdrucks mittels fest angebrachtem Überlauf; keine Veränderung in der Wasserhöhe; Regelung der Durchflussmenge an der Spitze mittels Nadelventil (Grobeinstellung) und Wassertemperatur (Feineinstellung) [entnommen aus Katsuyama & Nagata 1999]

A.4. Weitere Fotos vom Versuchsaufbau



Abbildung A.17: verwendete Mariott'sche Flasche mit den in Kap. 4.1 genannten Eigenschaften; Biegewinkel des inneren l-förmigen Glasröhrchens: etwa 95°

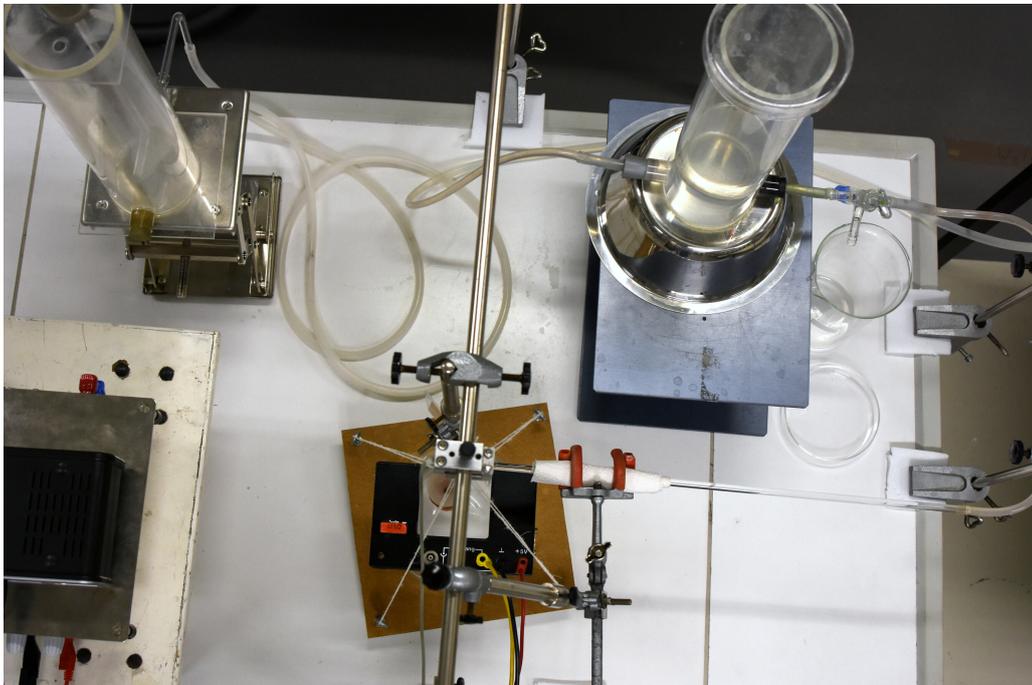


Abbildung A.18: Tropfeinheit mit Messwerterfassung von oben (hier ohne Streuscheibe und Entleerungsleitung)

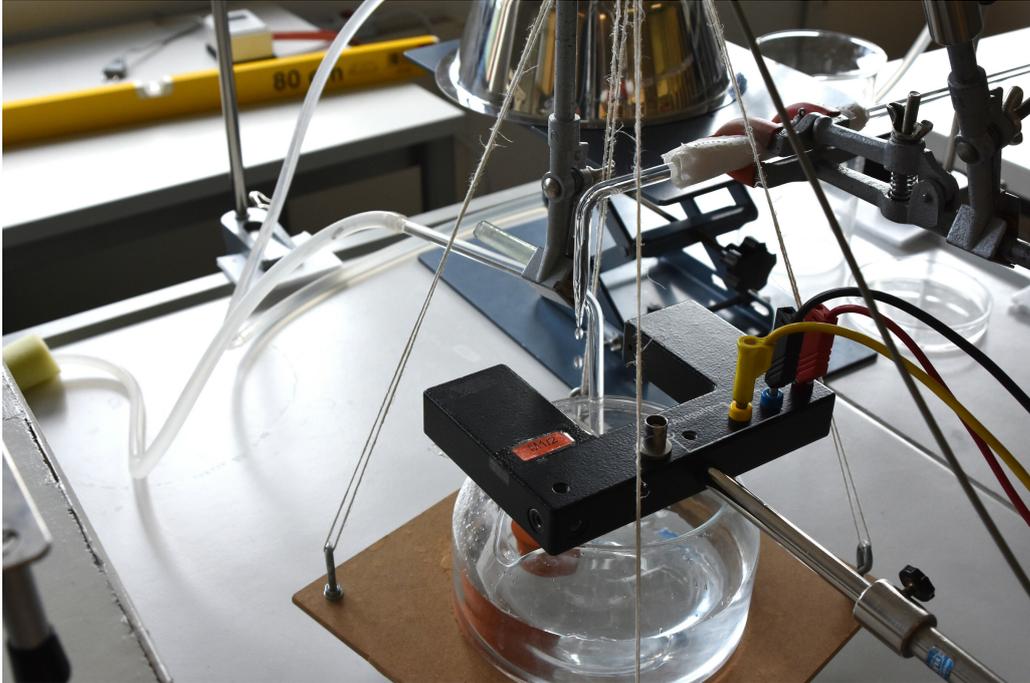


Abbildung A.19: Detailansicht von Austropfspitze, Auffangbehältnis und Entleerungsleitung



Abbildung A.20: Heruntergeführtes Ende der Entleerungsleitung zur schnellen und störungsarmen Entleerung des Auffangbehältnisses

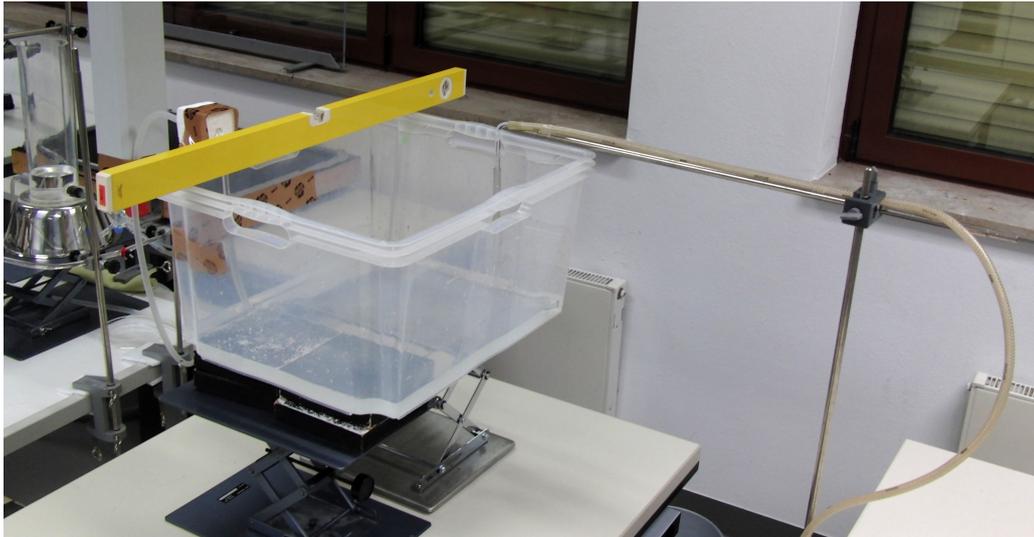


Abbildung A.21: Wasserreservoir mit großer Oberfläche auf separatem Tisch zur Speisung des Ausgleichsgefäßes; ebenfalls zu sehen: optional angebrachte Wasserzufuhr zur langsamen Befüllung des Reservoirs

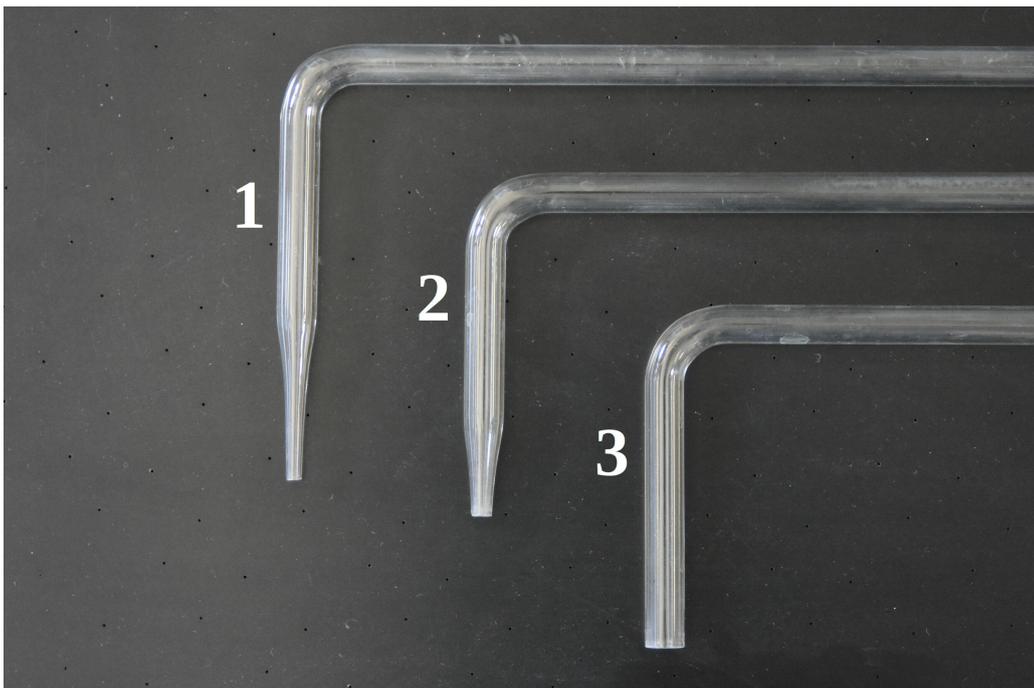


Abbildung A.22: verwendete Glasspitzen — für die genauen Maße siehe Tabelle 4.1

A.5. Stroboskopaufnahmen der Tropfenbildung

Nachfolgend abgebildete Tropfserien wurden mit einer Kamera im Burst-Modus aufgenommen. Der zeitliche Abstand zwischen den Einzelbildern sollte pro Serie in etwa gleich sein.

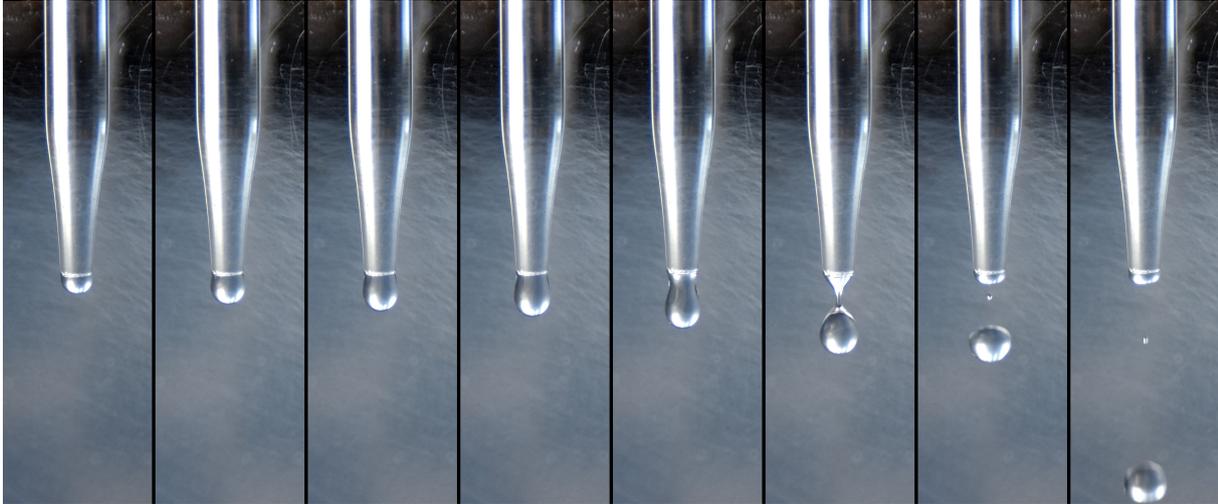


Abbildung A.23: Stroboskopaufnahme der Tropfenbildung für Spitze 2 (s. Tab. 4.1) bei niedriger Durchflussmenge (etwa 3 Tropfen/s); jeder zweite Tropfen ein sehr kleiner Satellitentropfen

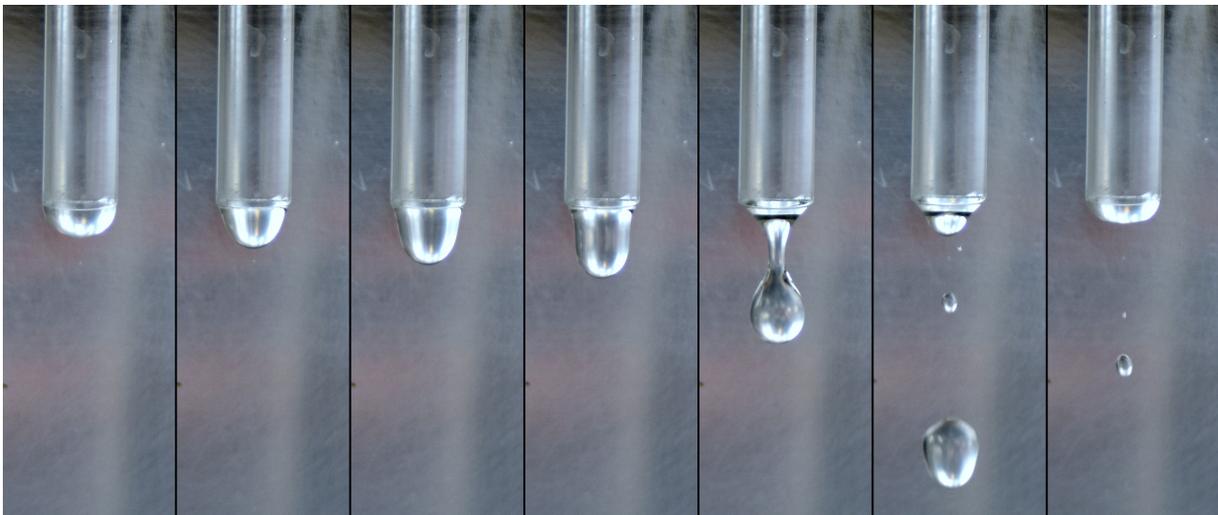


Abbildung A.24: Stroboskopaufnahme der Tropfenbildung für Spitze 3 (s. Tab. 4.1) bei niedriger Durchflussmenge (etwa 3 Tropfen/s); jeder zweite Tropfen ein Satellitentropfen



Abbildung A.25: Stroboskopaufnahme der Tropfenbildung für Spitze 2 (s. Tab. 4.1) bei hoher Durchflussmenge (etwa 40 Tropfen/s) und chaotischem Verhalten; keine Satellitentropfen mehr erkennbar

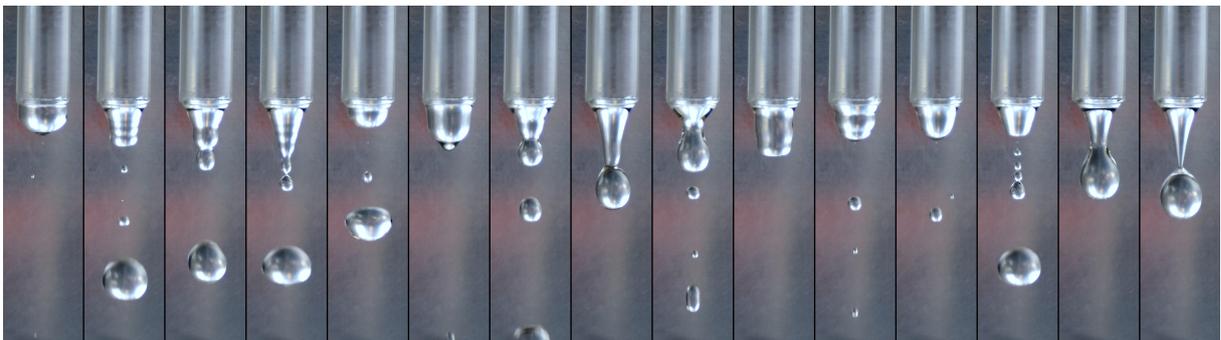


Abbildung A.26: Stroboskopaufnahme der Tropfenbildung für Spitze 3 (s. Tab. 4.1) bei hoher Durchflussmenge (etwa 40 Tropfen/s) und chaotischem Verhalten; (scheinbar) zufällige Bildung verschieden großer Satellitentropfen

A.6. Weitere Tropfdiagramme und Return-Maps

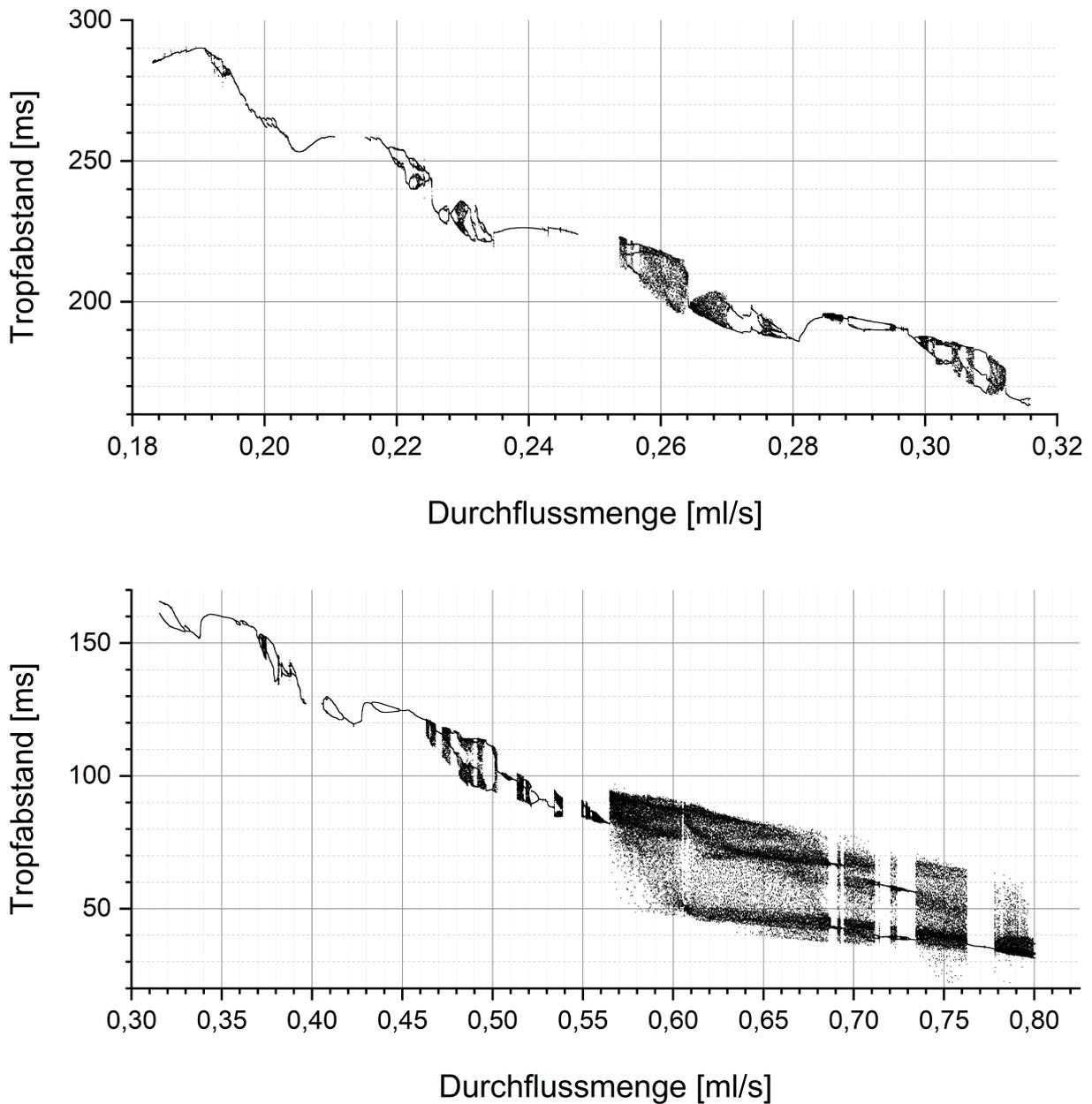


Abbildung A.27: Tropfdiagramm für Spitze 1 (s. Tab. 4.1) über einen weiten Bereich an Durchflussmengen (Daten enthalten kleine Lücken aufgrund nötiger Messunterbrechungen zum Zwischenspeichern und Entleeren des Austropfgefäßes)

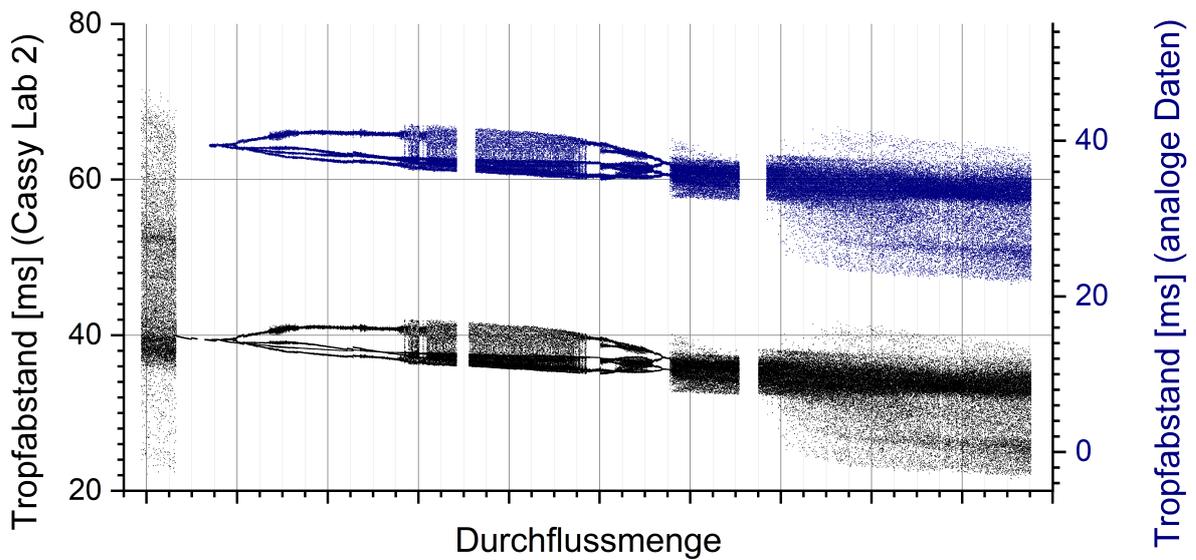


Abbildung A.28: Vergleich der mittels *Cassy Lab 2* aufgenommenen Daten mit den aufbereiteten Rohdaten bei 10 kHz-Abtastrate: qualitatives Systemverhalten ist trotz geringerer Auflösung der Rohdaten noch gut erkennbar (feine Details sind jedoch teils unscharf – s. Abb. 5.5) (Daten enthalten kleine Lücken aufgrund nötiger Messunterbrechungen zum Zwischenspeichern)

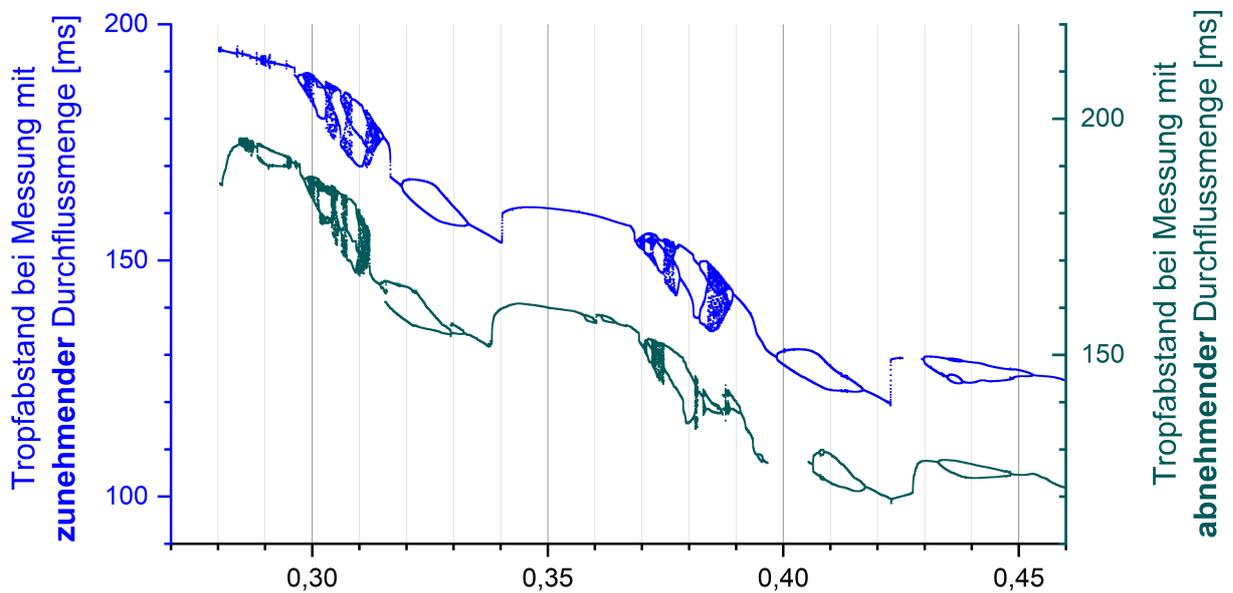


Abbildung A.29: vergrößerter Ausschnitt von Abb. 5.7: sich wiederholendes Muster (unit structure) bei niedrigen Durchflussmengen und Spitze 1

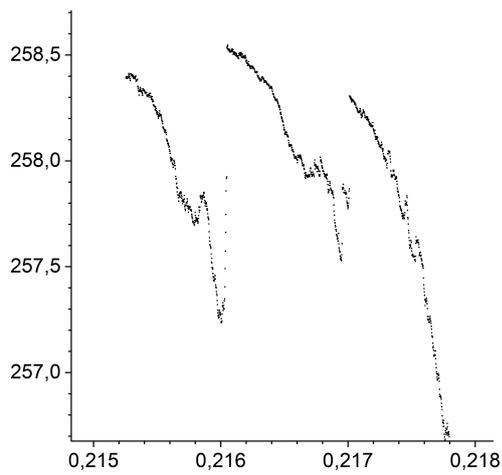


Abbildung A.30: sprunghafte Änderungen in den Tropfabständen – vermutlich verursacht durch Entstehen bzw. Ausbleiben von nicht detektierten, sehr kleinen Satellitentropfen (Spitze 1)

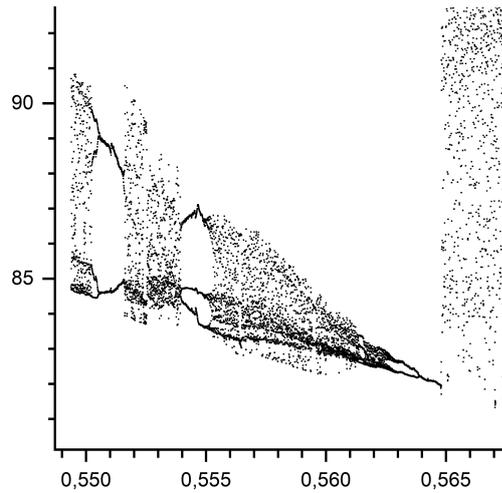
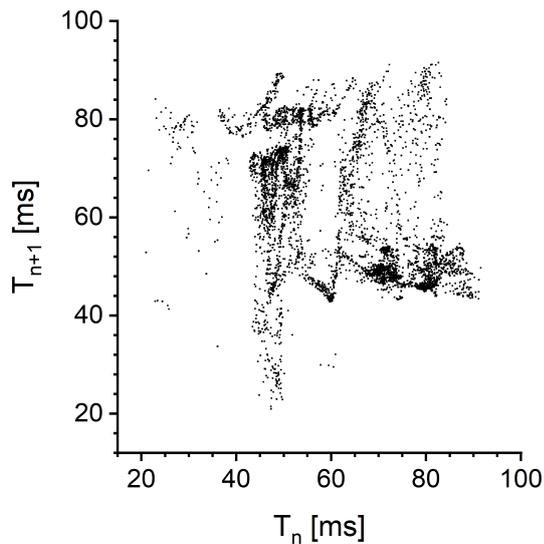
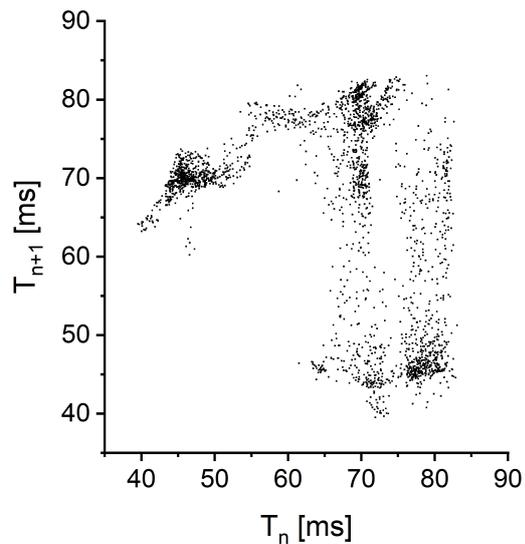


Abbildung A.31: unvermittelter Übergang einer stabilen Einer-Periode ins Chaos, vermutlich durch Attraktorkrise (Spitze 1)



$0,945 \text{ ml/s} \leq Q < 0,955 \text{ ml/s};$
 $n \approx 4800;$ Spitze 2



$0,645 \text{ ml/s} \leq Q < 0,655 \text{ ml/s};$
 $n \approx 2500;$ Spitze 1

Abbildung A.32: weitere Beispiele für Return-Maps von Bereichen komplexen chaotischen Systemverhaltens; gut erkennbar: Existenz von seltsamen Attraktoren

A.7. Mathematica-Rechenblatt zur Berechnung des theoretischen Fitfehlers bei polynomiellem statt exponentiellem Fit

```
1  (*Nachfolgend wird anhand einer konkreten Messdatendatei für die Kraftmessung abgeschätzt,  
   *welcher Fehler sich (höchstens) bei Interpolation der Messwerte auf Basis eines  
   *polynomiellen Zusammenhangs statt des korrekten exponentiellen Zusammenhangs ergibt.  
2  *Der Datensatz stammt von einer Leertropfmessung, also folgen die Messwerte einem rein  
   *exponentiellen Zusammenhang.*)  
3  
4  (*Definiere f als die theoretisch exakte Funktion.*)  
5  f[t_]:=a0*Exp[-a1*t]+a2  
6  
7  (*Definiere nun ein paar denkbare polynomielle Fitfunktionen g_i. Mache dazu eine  
   *Taylorentwicklung von f mit Entwicklungspunkt e. e ist das arithmetische Mittel aus  
8  *Start- und Endzeit der betrachteten Messung. Dies lässt die Taylor-Entwicklung für Zeiten t  
   *aus dem Messzeitraum, betrachtet über den gesamten Messzeitraum, so präzise wie mö  
   *glich werden.*)  
9  e := 3934.65  
10 g2[t_] := Normal[Series[f[t],{t,e/2,2}]] (*Taylor-Polynom 2. Grades*)  
11 g3[t_] := Normal[Series[f[t],{t,e/2,3}]] (*Taylor-Polynom 3. Grades*)  
12 g4[t_] := Normal[Series[f[t],{t,e/2,4}]] (*Taylor-Polynom 4. Grades*)  
13 g5[t_] := Normal[Series[f[t],{t,e/2,5}]] (*Taylor-Polynom 5. Grades*)  
14  
15 (*Ein Datenfit für die exponentielle Funktion f mittels Origin liefert folgende Fit-Parameter:  
   *)  
16 a0 := -284.78249  
17 a1 := 4.59105*10^(-5)  
18 a2 := 278.78568  
19  
20 (*Berechne nun, um wie viel die polynomiellen Fitfunktionen jeweils von der exponentiellen  
   *Fitfunktion – über den gesamten Messzeitraum akkumuliert – abweichen. r_i seien die  
   *Absolutwerte (in Newton), p_i die prozentuale Abweichung.  
21 *Als prozentuale Abweichung defniere: p_i := Differenzfläche_zwischen_f_und_g /  
   *gesamte_Fläche_unter_f*)  
22 r2 := Integrate[Abs[f[t]-g2[t]],{t,0,e}]  
23 r3 := Integrate[Abs[f[t]-g3[t]],{t,0,e}]  
24 r4 := Integrate[Abs[f[t]-g4[t]],{t,0,e}]  
25 r5 := Integrate[Abs[f[t]-g5[t]],{t,0,e}]  
26 s := Integrate[Abs[f[t]],{t,0,e}] (*gesamte Fläche unter f*)  
27 p2 := r2/s  
28 p3 := r3/s  
29 p4:= r4/s  
30 p5:= r5/s  
31  
32
```

```
33 (*Ergebnisse:*)
34 Echo[{r2, p2}, "Abweichung eines Polynom 2. Grades von f: "];
35 Echo[{r3, p3}, "Abweichung eines Polynom 3. Grades von f: "];
36 Echo[{r4, p4}, "Abweichung eines Polynom 4. Grades von f: "];
37 Echo[{r5, p5}, "Abweichung eines Polynom 5. Grades von f: "];
38 Abweichung eines Polynom 2. Grades von f: {31.4387, 0.000421699}
39 Abweichung eines Polynom 3. Grades von f: {0.56787, 7.61705*10^-6}
40 Abweichung eines Polynom 4. Grades von f: {0.00854801, 1.14658*10^-7}
41 Abweichung eines Polynom 5. Grades von f: {0.000110291, 1.47937*10^-9}
```

A.8. Python-Skript zur Aufbereitung der Messdaten

Zur besseren Lesbarkeit wird die Dokumentation aus dem nachfolgenden Quellcode entfernt und voran gesetzt.

General description

This script processes

- either the raw data of the beam barrier recorded by Pasco Capstone (10kHz sampling) (raw mode)
- or the data recorded by Cassy Lab (cassy mode)

and returns an output csv file for plotting with origin.

Choose mode by `-m <raw|cassy>` or `--mode=<raw|cassy>`.

It requires an input file (`-i | --ifile=`) and needs specification of an output file (`-o | --ofile=`).

Output file must not already exist.

Several additional options for processing are available.

Description of raw mode

Script extracts exact timestamps at which a droplet enters the beam of the light barrier and calculates the time interval to the previous droplet. (That means the time extracted is the time when the signal drops from about +5V to about 0V. In addition the script calculates more exact timestamps of these events than raw data containing. So output timestamps have one more significant digit than raw data.)

Description of cassy mode

Script calculates from given (inverted) "Dunkelzeit" (time between two drops) and corresponding timestamp the real time interval to the previous droplet and it's timestamp.

Description of additional options

`-a | --analyse`

The script can analyse on signal interruptions (for synchronization purposes), and print the timestamp of the end of each interruption interval.

`-s <time shift> | --shift=<time shift>`

Given a time shift in seconds (float), it returns a data file with synchronized (corrected) timestamps.

`-f <function type> | --flow=<function type>`

The instantaneous flow rate will be calculated for each timestamp

and written to the output file.

(formula: $\text{flowRate} = \text{changeOfTheForce} / (\text{gravitationalAcceleration} * \text{densityOfWater})$)

(for density 0.997048 g/ml (pure water at 25°C) is used,
for gravitational acceleration 9.81 m/s²)

This requires the specification of a function type for the functional relationship for the force measurement data.

Implemented options are:

p2: $F(t) = a_0 + a_1*t + a_2*t^2$

p3: $F(t) = a_0 + a_1*t + a_2*t^2 + a_3*t^3$

pureExp: $F(t) = a_0*\exp(-a_1*t) + a_2$

expLin: $F(t) = a_0*\exp(-a_1*t) + a_2*t + a_3$

Parameters a_i have to be specified with the `-p` option.

(If used together with `-s`: Be sure, that the function refers to synchronized time!)

`-p <(a_0;a_1;a_2[;a_3])> | --parameters=<(a_0;a_1;a_2[;a_3])>`

Specifies the parameters of the function for the force measurement (e. g. obtainable via interpolation of the force measurement data).

(Has to be used together with `-f`.)

`-h | --help`

Print this help and documentation.

Author

Jonas Vollhardt

Version

2.4.1

```

1  #!/usr/bin/python
2
3  usage= """
4  Usage: processBeamBarrierData.py -m <raw/cassy> -i <inputfile> -o <
      outputfile> [-s <float value for time shift>] [-a] [-f <function type> -
      p <'(a_0;a_1;a_2)']>]
5  Optional arguments:
6  -a
7      just analyse input file on interruption intervals and print results (if
      chosen, -s/-f have no effect)
8  -s <time to shift in seconds (float)>
9      subtract from every timestamp XX seconds and discard data lines before
      synchronization interruption
10 -f <function type> -p <'(a_0;a_1;a_2[;a_3])'>
11      calculate current flow rate for every data line by given <function type>
      function with parameters a_i for the force (i.e. determined via
      interpolation)
12      implemented function types are:
13      p2: F(t) = a_0 + a_1*t + a_2*t^2
14      p3: F(t) = a_0 + a_1*t + a_2*t^2 + a_3*t^3

```

```

15     pureExp:  $F(t) = a_0 \cdot \exp(-a_1 \cdot t) + a_2$ 
16     expLin:  $F(t) = a_0 \cdot \exp(-a_1 \cdot t) + a_2 \cdot t + a_3$ 
17     See more details in following documentation.
18     """
19
20     documentation = """
21     For better readability in this thesis before the code section.
22     """
23
24     import sys, getopt
25     import os
26     import math
27
28
29     # define globals
30     threshold_drop_in_beam_voltage = float(1.0) #raw signal voltage if droplet is in
        beam
31     threshold_interruption_voltage = float(4.3) #raw signal voltage while
        synchronization interruption
32     threshold_interruption_duration = float (0.85) #time in seconds that
        synchronization interruption lasts at least
33     separator = ';'
34     gfactor = float(9.81) #m/s2
35     densityOfWater = float(0.000997048) #kg/ml
36
37
38     # define main function
39     def main(argv):
40
41         # define status globals
42         mode = 0 #1 - raw mode, 2 - cassy mode
43         analyseMode = False
44         shiftMode = False
45         flowCalculationMode = False
46
47         #initialize passable arguments
48         inputfile = ''
49         outputfile = ''
50         coefficients = []
51         functionType = 0 #p2=1; p3=2; pureExp=3; expLin=4
52
53         # check if options and arguments are set properly
54         try:
55             opts, args = getopt.getopt(argv,"hai:o:s:f:m:p:",["ifile=", "ofile=",
                ,"help", "analyse", "shift=", "flow=", "mode=", "parameters="])
56         except getopt.GetoptError:
57             print('Wrong option(s) used or missing arguments.\nSee help page
                with -h|--help.')
58             sys.exit(2)
59         for opt, arg in opts:
60             if opt in ("-h", "--help"):
61                 print(usage)
62                 print(documentation)
63                 sys.exit()
64             elif opt in ("-m", "--mode"):
65                 #check if given argument for mode is valid
66                 if len(arg.strip()) != 0:
67                     if arg == "raw":
68                         mode = 1
69                     print('Script started in raw mode.')
70                     elif arg == "cassy":

```

```
71         mode = 2
72         print('Script started in cassy mode.')
73     else:
74         print('{} is not a valid operation mode type. Use -h
75             for help. Exiting.'.format(arg))
76         sys.exit(2)
77     else:
78         print('No operation mode type given. Use -h for help.
79             Exiting.')
80         sys.exit(2)
81     elif opt in ("-i", "--ifile"):
82         #check if given argument for input file is valid
83         if len(arg.strip()) != 0:
84             if os.path.isfile(arg) and not os.path.isdir(arg):
85                 inputfile = arg
86             else:
87                 print('', arg, ' is not a valid input file. Use -h
88                     for help. Exiting.')
89                 sys.exit(2)
90     elif opt in ("-o", "--ofile"):
91         #check if given argument for output file is valid and not path to a existing
92             file/directory
93         if len(arg.strip()) != 0:
94             if not os.path.isfile(arg) and not os.path.isdir(arg):
95                 outputfile = arg
96             else:
97                 print('', arg, ' is not a valid output file (is an
98                     existing regular file or directory). Use -h for help
99                     . Exiting.')
100                 sys.exit(2)
101     else:
102         print('Empty output file string. Use -h for help. Exiting.'
103             )
104         sys.exit(2)
105     elif opt in ("-a", "--analyse"):
106         if len(arg.strip()) == 0:
107             analyseMode = True
108         else:
109             print('No arguments after -a|--analyse allowed. Use -h for
110                 help. Please try again.')
111             sys.exit(2)
112     elif opt in ("-s", "--shift"):
113         if len(arg.strip()) != 0 and arg.replace('.', '', 1).isdigit():
114             shiftMode = True
115             shift = float(arg)
116         else:
117             print('{} is not a valid float for shifting. Use -h for
118                 help. Exiting.'.format(arg))
119             sys.exit(2)
120     elif opt in ("-p", "--parameters"):
121         if len(arg.strip()) != 0:
122             coefficients = arg.replace('(', '').replace(')', '').split('
123                 ;')
```

```

122         for help. Exiting.')
```

```

123     sys.exit(2)
124 elif opt in ("-f", "--flow"):
125     if len(arg.strip()) != 0:
126         flowCalculationMode = True
127         if arg == "p2":
128             functionType = 1
129         elif arg == "p3":
130             functionType = 2
131         elif arg == "pureExp":
132             functionType = 3
133         elif arg == "expLin":
134             functionType = 4
135         else:
136             print('Invalid function type given. Use -h for help.
137                 Exiting.')
```

```

138     sys.exit(2)
139 else:
140     print('No function type given. Use -h for help. Exiting.')
```

```

141     sys.exit(2)
142 # make sure mandatory arguments are set
143 if len(inputfile.strip()) == 0 or len(outputfile.strip()) == 0:
144     print("Input file and/or output file is not set. Use -h for help.
145         Exiting.")
146     sys.exit(2)
147 if mode == 0:
148     print('Operation mode not set. Use -h for help. Exiting.')
```

```

149     sys.exit(2)
150 # check if analyseMode is requested
151 if analyseMode:
152     print('Script started in analyse mode. Searching for interruption
153         intervals.')
```

```

154     analyseOnInterruptions(inputfile, mode)
155     sys.exit()
156 # check if flowCalculationMode is requested and both parameters and functionType
157 # are specified and compatible
158 if flowCalculationMode:
159     if functionType == 0 or not coefficients:
160         print('Flow calculation mode is selected but function type and/
161             or parameters for the force function is/are not specified.
162             Use -h for help. Exiting.')
```

```

163     sys.exit(2)
164     if (functionType == 1 and len(coefficients) != 3) or (functionType
165         == 2 and len(coefficients) != 4) or (functionType == 3 and len(
166         coefficients) != 3) or (functionType == 4 and len(coefficients)
167         != 4):
168         print('Given function type mismatches given number of
169             parameters. Exiting.')
```

```

170     sys.exit(2)
171 # print warning due to paranoia reasons
172 if shiftMode and flowCalculationMode:
173     print('Both shift mode and flow calculation mode selected.\n\033[1m
174         \033[91mPlease make sure that the given function refers to the
175         synchronized time.\033[0m')
```

```

176 elif not shiftMode and flowCalculationMode:
177     print('Only flow calculation mode selected.\n\033[1m\033[91mPlease
178         make sure that the given function refers to the original (not
179         any synchronized) time.\033[0m')
```

```

170
171 #no analyse mode, start reading input file line by line and find and extract the
    relevant lines
172 print('Reading input file "{}" and writing output to "{}".'.format(
    inputfile, outputfile))
173 infile = open(inputfile, 'r')
174 line = infile.readline()
175 counter = 0
176 buffer = [] #2D python list, holding the last 31 lines of input file - only for raw
    mode
177 timestampLast = None
178 outfile = open(outputfile, 'w')
179 if flowCalculationMode:
180     if shiftMode:
181         outfile.write('time (synchronized) [s];calculated flow rate [ml
            /s];timespan to last drop [ms]\n')
182     else:
183         outfile.write('time [s];calculated flow rate [ml/s];timespan to
            last drop [ms]\n')
184 if functionType == 1:
185     outfile.write('#quadratic function for force: F(t) = {} + {}*t
        + {}*t^2\n'.format(float(coefficients[0]), float(
            coefficients[1]), float(coefficients[2])))
186     outfile.write('#=> derivation (proportionate to flow rate) is:
        F\'(t) = {} + {}*t\n'.format(float(coefficients[1]), float(
            coefficients[2])*2))
187     outfile.write('#used constants: gravitational acceleration: {}
        m/s^2 | density of water: {} kg/ml\n'.format(gfactor,
            densityOfWater))
188 elif functionType == 2:
189     outfile.write('#cubic function for force: F(t) = {} + {}*t +
        {}*t^2 + {}*t^3\n'.format(float(coefficients[0]), float(
            coefficients[1]), float(coefficients[2]), float(coefficients
            [3])))
190     outfile.write('#=> derivation (proportionate to flow rate) is:
        F\'(t) = {} + {}*t + {}*t^2\n'.format(float(coefficients[1])
            , float(coefficients[2])*2, float(coefficients[3])*3))
191     outfile.write('#used constants: gravitational acceleration: {}
        m/s^2 | density of water: {} kg/ml\n'.format(gfactor,
            densityOfWater))
192 elif functionType == 3:
193     outfile.write('#pure exponential function for force: F(t) = {}*
        exp({}*t) + {}\n'.format(float(coefficients[0]), float(
            coefficients[1])*(-1), float(coefficients[2])))
194     outfile.write('#=> derivation (proportionate to flow rate) is:
        F\'(t) = {}*exp({}*t)\n'.format(float(coefficients[0])*float(
            coefficients[1])*(-1), float(coefficients[1])*(-1)))
195     outfile.write('#used constants: gravitational acceleration: {}
        m/s^2 | density of water: {} kg/ml\n'.format(gfactor,
            densityOfWater))
196 else:
197     outfile.write('#function for force: F(t) = {}*exp({}*t) + {}*t
        + {}\n'.format(float(coefficients[0]), float(coefficients
            [1])*(-1), float(coefficients[2]), float(coefficients[3])))
198     outfile.write('#=> derivation (proportionate to flow rate) is:
        F\'(t) = {}*exp({}*t) + {}\n'.format(float(coefficients[0])*
            float(coefficients[1])*(-1), float(coefficients[1])*(-1),
            float(coefficients[2])))
199     outfile.write('#used constants: gravitational acceleration: {}
        m/s^2 | density of water: {} kg/ml\n'.format(gfactor,
            densityOfWater))
200 elif shiftMode and not flowCalculationMode:
201     outfile.write('time (synchronized) [s];timespan to last drop [ms]\n
        ')

```

```

202     else:
203         outfile.write('time [s];timespan to last drop [ms]\n')
204
205     while line:
206         # skip first line of csv
207         if counter == 0:
208             counter += 1
209             line = infile.readline()
210             continue
211         if mode == 1: #raw mode
212             # store last 31 lines in array (list), and evaluate now the line of 16 loops
                before
213             # (idea: array holds 15 lines before and after the evaluated line, so
                calculation of exact timestamp (one more digit) is possible)
214             data = line.strip('\n').replace(',', ' ').split(separator) #
                data[0]: timestamp, data[1]:
                voltage
215             if len(data) != 2:
216                 print('Unexpected data structure found in line {}. Exiting.
                '.format(counter+1))
217                 sys.exit(2)
218             # evaluate and calculate stuff
219             if counter > 31: #buffer filled
220                 # evaluate buffer line 16
221                 timestamp = evaluateLine(buffer, counter)
222                 if timestamp is not None:
223                     # calculate timestamp's last digit
224                     timestamp = calculateLastDigit(buffer, counter)
225                     if shiftMode:
226                         timestamp = timestamp - shift
227                     if timestampLast:
228                         # calculate time interval between last droplet and current
                            croplet
229                         interval = (timestamp - timestampLast)*1000
230                         # write out data to output file, depending on which mode(s)
                            is/are selected
231                         # and discard data lines before signal synchronization
232                         if (shiftMode and timestampLast > 0 and
                            flowCalculationMode) or (not shiftMode and
                            flowCalculationMode):
233                             if functionType == 1:
234                                 flowrate = (float(coefficients[1]) + float(
                                    coefficients[2])*2*timestamp) / (gfactor
                                    *densityOfWater)
235                             elif functionType == 2:
236                                 flowrate = (float(coefficients[1]) + float(
                                    coefficients[2])*2*timestamp + float(
                                    coefficients[3])*3*timestamp**2) / (
                                    gfactor*densityOfWater)
237                             elif functionType == 3:
238                                 flowrate = ((-1)*float(coefficients[0])*
                                    float(coefficients[1])*math.exp((-1)*
                                    float(coefficients[1])*timestamp)) / (
                                    gfactor*densityOfWater)
239                             else:
240                                 flowrate = ((-1)*float(coefficients[0])*
                                    float(coefficients[1])*math.exp((-1)*
                                    float(coefficients[1])*timestamp) +
                                    float(coefficients[2])) / (gfactor*
                                    densityOfWater)
241             outfile.write("{};{};\n".format(round(
                timestamp, 6), round(flowrate, 9), round(

```

```

                interval, 2)))
242         elif (not shiftMode and not flowCalculationMode) or
            (shiftMode and timestampLast > 0 and not
            flowCalculationMode):
243             outfile.write("{};{};{}\n".format(round(timestamp,
                6), round(interval, 2)))
244             timestampLast = timestamp
245             # delete first entry in buffer
246             del buffer[0]
247             buffer.append(data)
248     else: #cassy mode
249         # store last line in timestampLast, and calculate real time interval to the
            previous droplet and it's timestamp
250         data = line.strip('\n').replace(',', '.').split(separator) #
            data[0]: gibberish timestamp, data[1]: timestamp, data[2]:
            Dunkelzeit
251         if len(data) != 3:
252             print('Unexpected data structure found in line {}. Exiting.
                '.format(counter+1))
253             sys.exit(2)
254         # evaluate and calculate stuff
255         if shiftMode:
256             newTimestamp = float(data[1]) + 0.001*float(data[2]) -
                shift
257         else:
258             newTimestamp = float(data[1]) + 0.001*float(data[2])
259         if timestampLast: #timestampLast not empty
260             newInterval = (newTimestamp - timestampLast)*1000
261             if (shiftMode and timestampLast > 0 and flowCalculationMode
                ) or (not shiftMode and flowCalculationMode): #prevent
                printing lines with newly negatives timestamps
262                 if functionType == 1:
263                     flowrate = (float(coefficients[1]) + float(
                        coefficients[2])*2*newTimestamp) / (gfactor*
                        densityOfWater)
264                 elif functionType == 2:
265                     flowrate = (float(coefficients[1]) + float(
                        coefficients[2])*2*newTimestamp + float(
                        coefficients[3])*3*newTimestamp**2) / (gfactor*
                        densityOfWater)
266                 elif functionType == 3:
267                     flowrate = ((-1)*float(coefficients[0])*float(
                        coefficients[1])*math.exp((-1)*float(
                        coefficients[1])*newTimestamp)) / (gfactor*
                        densityOfWater)
268                 else:
269                     flowrate = ((-1)*float(coefficients[0])*float(
                        coefficients[1])*math.exp((-1)*float(
                        coefficients[1])*newTimestamp) + float(
                        coefficients[2])) / (gfactor*densityOfWater)
270             outfile.write('{};{};{}\n'.format(round(newTimestamp,
                9), round(flowrate, 9), round(newInterval, 6)))
271         elif (not shiftMode and not flowCalculationMode) or (
            shiftMode and timestampLast > 0 and not
            flowCalculationMode):
272             outfile.write('{};{};{}\n'.format(round(newTimestamp, 9),
                round(newInterval, 6)))
273             timestampLast = newTimestamp
274             line = infile.readline()
275             counter += 1
276             infile.close()
277             outfile.close()
278             # optional TODO: first and last 15 lines are not evaluated

```

```

279
280
281 # evaluates if list element 16 is begin of detection of new droplet
282 # only for raw mode
283 def evaluateLine(bufferArr, cnt):
284     if float(bufferArr[15][1]) < threshold_drop_in_beam_voltage:
285         # check if droplet is in beam only from this row -> if no, discard this line
286         if not float(bufferArr[14][1]) < threshold_drop_in_beam_voltage:
287             #print("found min at in line ".format(bufferArr[15][0], cnt - 14))
288             return float(bufferArr[15][0])
289         else:
290             return None
291     else:
292         return None
293
294
295 # calculates and returns last digit of timestamp at position 16 in list
296 # (works because of known and fixed sampling frequency at 10 kHz)
297 # Notice: The following calculation method generates minor errors! (optional TODO)
298 def calculateLastDigit(bufferArr, cnt):
299     cnt_before = 0; #number of lines before this line with exactly the same timestamp
300     cnt_after = 0; #number of lines after this line with exactly the same timestamp
301     tmstmp = float(bufferArr[15][0])
302     # do calculations
303     while abs(float(bufferArr[14 - cnt_before][0]) - tmstmp) < float
304         (0.0005):
305         cnt_before += 1
306     while abs(float(bufferArr[16 + cnt_after][0]) - tmstmp) < float(0.0005)
307         :
308         cnt_after += 1
309     digit = float(1 / (1 + cnt_before + cnt_after) * (cnt_before))
310     ret = tmstmp + digit*0.001
311     return ret
312
313 # analyses given input file on interruption intervals (for synchronisation purposes) and
314 prints results
315 def analyseOnInterruptions(datafile, mod):
316     infile = open(datafile, 'r')
317     line = infile.readline()
318     lineCounter = 0
319     interruptionCounter = 0
320     lastMatches = 0 #only for raw mode
321     lastLineMatched = False #only for raw mode
322     lastLine = [] #only for cassy mode
323     # determine if line belongs to interruption interval, count interruptions and print
324     results
325     # always determine and print timestamp of *end* of interruption interval
326     while line:
327         # skip first line of csv
328         if lineCounter == 0:
329             lineCounter += 1
330             line = infile.readline()
331             continue
332         if mod == 1:
333             #raw mode
334             data = line.strip('\n').replace(',', ' ').split(separator) #
335                 data[0]: timestamp, data[1]: signal
336                 voltage
337             # make sure line contains expected data structure
338             if len(data) != 2:

```

```

334         print('Unexpected data structure found in line {}. Exiting.
           '.format(lineCounter+1))
335         print(line)
336         sys.exit(2)
337     # check if line contains possible interruption and determine timestamp of
           end of interruption
338     # interruption in raw mode means signal < threshold voltage
339     if float(data[1]) < (threshold_interruption_voltage + 0.4) and
       float(data[1]) > (threshold_interruption_voltage - 0.4): #
           possible interruption
           found
340         lastMatches += 1
341         lastLineMatched = True
342     else: #check if this line marks end of an interruption
343         if lastLineMatched:
344             if lastMatches > 160: #only few matches could mean, that a
               droplet comes into the beam and voltage decreases quickly
               interruptionCounter += 1
345                 print('Interruption (No. {}) found in line {}.
                       Timestamp of ending is: {}s'.format(
346                           interruptionCounter, lineCounter, data[0]))
347                 lastLineMatched = False
348                 lastMatches = 0
349     else:
350     #cassy mode
351     data = line.strip('\n').replace(',','').split(separator) #
           data[0]: gibberish timestamp, data[1]: timestamp, data[2]:
           Dunkelzeit
352     # make sure line contains expected data structure
353     if len(data) != 3:
354         print('Unexpected data structure found in line {}. Exiting.
           '.format(lineCounter+1))
355         print(line)
356         sys.exit(2)
357     # check if line contains possible interruption and determine timestamp of
           end of interruption
358     # interruption in cassy mode means no signal for > threshold time
359     if lastLine: #lastLine not empty
360         if (float(data[1]) - float(lastLine[1])) >
           threshold_interruption_duration:
361             interruptionCounter += 1
362             print('Interruption (No. {}) found in line {}.
                   Timestamp of ending is: {}s'.format(
                       interruptionCounter, lineCounter, data[1]))
363         lastLine = data
364         line = infile.readline()
365         lineCounter += 1
366     infile.close()
367
368
369 # call main function
370 if __name__ == "__main__":
371     main(sys.argv[1:])

```

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere an Eides statt durch meine Unterschrift, dass ich die vorstehende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich, annähernd wörtlich oder dem Sinn nach aus Veröffentlichungen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Des Weiteren erkläre ich, dass ich mich keiner anderen als der angegebenen Literatur oder sonstiger Hilfsmittel bedient habe. Diese Versicherung gilt auch für Abbildungen, Tabellen und Ähnliches. Die vorliegende Arbeit wurde in dieser oder ähnlicher Form an keiner weiteren Prüfungsstelle eingereicht.

Ort, Datum

Unterschrift