

# Polarisation des Lichts

## 1 Vorbereitung

### 1.1 Theoretische Grundlagen

Siehe Anhang

### 1.2 Erzeugung von linear polarisiertem Licht durch Reflexion

Literatur: Gerthsen

### 1.3 Aufbau und Funktionsweise eines Halbschattenpolarimeters

Literatur: Walcher

## 2 Aufgaben

### 2.1 Überprüfung des Malusschen Gesetzes

Man lasse das unpolarisierte Licht einer Glühlampe auf einen Polarisator fallen, dessen Transmissionsachse senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung des Lichts steht. Das dadurch erzeugte vertikal linear polarisierte Licht falle nun auf einen Analysator, dessen Transmissionsachse den Winkel  $\theta$  mit der Transmissionsachse des Polarisators einschließt. Die Intensität des vom Analysator durchgelassenen Lichts ist dann gegeben durch  $I(\theta) = I_0 \cos^2(\theta)$ , wobei  $I_0$  die Intensität des auf den Analysator fallenden Lichts ist.

Mit einer Photozelle messe man die Intensität  $I$  des vom Analysator durchgelassenen Lichts in Abhängigkeit vom Winkel  $\theta$  in Schritten von  $\Delta\theta = 10^\circ$ , beginnend mit  $\theta = 0^\circ$ . Man trage die Messwerte auf Polarkoordinatenpapier auf und prüfe, ob sie durch den obigen als Malussches Gesetz bekannten Zusammenhang hinreichend gut beschrieben werden.

Im Rahmen der Nachbereitung dieses Versuchsteils leite man das Malussche Gesetz her und zeige, dass die Intensität des auf den Analysator fallenden Lichts halb so groß wie die des in den Polarisator eingestrahnten Lichts ist.

### 2.2 Erzeugung und Nachweis von linear polarisiertem Licht

In diesem Versuchsteil werden verschiedene Möglichkeiten zur Erzeugung von linear polarisiertem Licht, das mit einem Analysator nachgewiesen werden kann, vorgestellt. Die folgenden Versuche sind dabei dem Betreuer vorzuführen, die experimentell erbrachten Nachweise bzw. Befunde qualitativ zu begründen.

#### 2.2.1 Lineare Polarisation durch Reflexion

Man lasse das unpolarisierte Licht einer Glühlampe unter dem Brewster-Winkel auf eine Glasplatte fallen und weise nach, dass das reflektierte Licht linear polarisiert ist. Man begründe, dass die Polarisationsebene des reflektierten Lichts senkrecht auf der Einfallsebene steht. Wie muss das unter dem Brewster-Winkel eingestrahlte Licht polarisiert sein, damit der reflektierte Strahl verschwindet?

#### 2.2.2 Lineare Polarisation durch Doppelbrechung

Man lasse das unpolarisierte Licht einer Glühlampe so auf einen Kalkspatkristall fallen, dass es in zwei Teilstrahlen, den ordinären und extraordinären Strahl aufgespalten wird. Man überlege sich, wie man die beiden Teilstrahlen mit dem am Arbeitsplatz zur Verfügung stehendem Equipment sichtbar machen kann. Man identifiziere den ordinären bzw. extraordinären Strahl und weise nach, dass sie senkrecht zueinander linear polarisiert sind. Wie könnte man experimentell nachweisen, dass die Doppelbrechung des Kristalls verschwindet, wenn sich das Licht im Innern des Kristalls parallel bzw. senkrecht zur optischen Achse ausbreitet?

## 2.3 Verzögerungsplatten: Versuche mit dem Lambdaviertelplättchen

Mit Hilfe von Verzögerungsplatten kann man den Polarisationszustand des einfallenden Lichts modifizieren. Sie bestehen typischerweise aus doppelbrechenden Kristallen, die parallel zur optischen Achse geschnitten sind. Als Beispiel für eine Verzögerungsplatte dient in diesem Versuchsteil ein aus Quarz bestehendes  $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen. Die folgenden Versuche sind dem Betreuer vorzuführen, die experimentell erbrachten Befunde qualitativ zu begründen und im Rahmen der Nachbereitung dieses Versuchsteils theoretisch zu fundieren.

Man strahle senkrecht in ein  $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen linear polarisiertes Licht ein und bestimme den Polarisationszustand des austretenden Lichts für die folgenden Winkel zwischen der optischen Achse des Plättchens und der Polarisationsebene des eingestrahlenen Lichts:  $\alpha = 0^\circ, -45^\circ, -90^\circ$ . Man begründe, dass man für alle anderen Winkel aus dem Intervall  $[-90^\circ, 0^\circ]$  elliptisch polarisiertes Licht erhält (kein Nachweis erforderlich) und erläutere kurz, wie man die verschiedenen Polarisationszustände des Lichts experimentell voneinander unterscheiden kann. Es sei nun  $\alpha = -45^\circ$ . Man bringe ein zweites, identisches  $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen so in den Strahlengang, dass seine optische Achse parallel zu der des ersten ist. Was ist nun zu beobachten? Man erläutere kurz, warum man das durch diese Konfiguration der Plättchen erhaltene optische Bauelement auch als Polarisationsdreher bezeichnet. Was würde man beobachten, wenn man eines der aus Quarz bestehenden Plättchen durch eines aus Kalkspat ersetzen würde?

### Nachbereitung

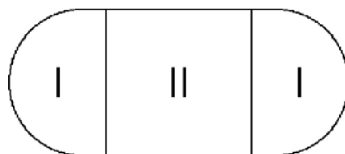
Die Polarisationszustände des Lichts lassen sich im sogenannten Jones-Formalismus durch zweikomponentige Vektoren darstellen. Optische Bauelemente, wie zum Beispiel Verzögerungsplatten werden durch  $2 \times 2$ -Matrizen beschrieben. Tritt eine polarisierte Lichtwelle in ein optisches Bauelement ein, so wird im Allgemeinen ihr Polarisationszustand geändert. Es gilt:  $\vec{J}_{\text{out}} = M \cdot \vec{J}_{\text{in}}$ . Dabei bezeichnen  $\vec{J}_{\text{in}}$  bzw.  $\vec{J}_{\text{out}}$  die Jones-Vektoren der in ein optisches Bauelement einfallenden bzw. der aus ihm austretenden polarisierten Lichtwelle, und  $M$  die das Bauelement beschreibende Jones-Matrix. Sind mehrere optische Bauelemente  $M_1, M_2, \dots, M_i$  hintereinandergeschaltet so lautet die obige Gleichung entsprechend:  $\vec{J}_{\text{out}} = M_i \dots M_1 \vec{J}_{\text{in}}$

- Man bestimme die Jones-Vektoren für die folgenden Polarisationszustände des Lichts:
  - linear polarisiert in x-, bzw. y-Richtung,
  - linear polarisiert entlang der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten,
  - rechts- bzw. linkszirkular polarisiert.
- Man ermittle die Jones-Matrix des im Versuch verwendeten  $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen.
- Mit den Ergebnissen aus den Aufgaben 1 und 2 und unter Verwendung der oben angegebenen Matrixgleichungen verifiziere man die im Versuch erhaltenen empirischen Befunde.  
Hinweis: Eine gut verständliche Einführung in den Jones-Formalismus findet sich in E. Hecht, Optik, S.605ff., 4. Auflage.

## 2.4 Optische Aktivität

### 2.4.1 Bestimmung des Halbschattenwinkels eines Halbschattenpolarimeters

Das Polarimeter, das bei diesem Versuch verwendet wird, hat folgende Halbschattenaufteilung



Dabei haben die Gebiete I die gleiche Polarisationsrichtung und Gebiet II eine um den Halbschattenwinkel  $\Psi$  dagegen geneigte. Messen Sie nun den Halbschattenwinkel zwischen den Gebieten I und II. Stellen Sie dafür jedes Gebiet auf maximale Dunkelheit ein, die Winkeldifferenz zwischen beiden Einstellungen ist der Halbschattenwinkel.



Für jede der beiden Winkeleinstellungen sind 5 Messungen zu machen. Berechnen Sie den Mittelwert des Halbschattenwinkels  $\Psi$  und die Standardabweichung  $\sigma_\Psi$ .

#### 2.4.2 Bestimmung der Konzentration einer wässrigen Zuckerlösung

Das spezifische Drehvermögen von Rohrzucker ist für Na-D-Licht:

$$[\alpha] = 6,65^\circ \text{ g}^{-1} \text{ cm}^{-2}$$

Da in der Regel kein Rohrzucker vorliegt und kein Na-D-Licht verwendet wird, ist zunächst der spezifische Drehwinkel für eine feste Wellenlänge zu bestimmen (Dazu wählt man eines der ausliegenden Interferenzfilter). Man erzeuge eine Zuckerlösung von 100 mg/ml und bestimme das spezifische Drehvermögen für Zucker bei der verwendeten Wellenlänge. Mit diesem Wert ermittle man die Konzentration einer beliebigen Zuckerlösung (Die Kalibrierlösung beliebig verdünnen). Der Fehler der Konzentration der Zuckerlösung ist abzuschätzen. Hinweis: Bitte spülen Sie nach der Benutzung das Probenrohr sorgfältig aus. Sollten Sie Zeit und Interesse besitzen, können Sie den spezifischen Drehwinkel zusätzlich in Abhängigkeit von der Wellenlänge bestimmen (Weitere Interferenzfilter liegen am Arbeitsplatz aus).

#### 2.5 Faraday-Effekt

In diesem Versuchsteil wird die Faraday-Rotation von linear polarisiertem Licht beim Durchgang durch einen Glaskörper, der von einem nahezu homogenen Magnetfeld der Flussdichte  $B$  durchsetzt ist, thematisiert.

Entfernen Sie zunächst den Glaskörper aus der Vorrichtung und bestimmen Sie seine Länge  $l$ . Lassen Sie nun einen Strom der Stärke  $I = 1,5 \text{ A}$  durch die Spule fließen und bestimmen Sie für den Bereich des entfernten Glaskörpers mit Hilfe der Hallsonde die magnetische Flussdichte  $B$  in Abhängigkeit vom Ort  $x$  (Schrittweite:  $\Delta x = 0,2 \text{ cm}$ ). Tragen Sie  $B(x)$  graphisch auf und überlegen Sie sich, wie man aus  $B(x)$  für die gesamte Länge des Glaskörpers ein effektives  $B_{\text{eff}} = \text{const.}$  bestimmen kann (Betreuer fragen!). Begründen Sie, dass sich mit Hilfe des Quotienten  $\alpha = \frac{B_{\text{eff}}}{B_{\text{max.gemessen}}}$  die effektiven magnetischen Flussdichten im Glaskörper für verschiedene Spulenströme bestimmen lassen. Bestimmen Sie nun  $B_{\text{eff}}$  für  $I = 0,5 \text{ A}$  bis  $I = 3,0 \text{ A}$  in Schritten von  $\Delta I = 0,3 \text{ A}$ . Beachten Sie, dass der Magnet nicht dauerhaft mit mehr als  $2 \text{ A}$  belastet werden darf, weil sich der Magnet sonst stark erhitzt. Da die Messung spannungsstabilisiert durchgeführt wird, resultiert die Temperaturerhöhung sonst in einen Magnetfeldstärkedrift.

Schalten Sie nun den Spulenstrom aus, um eine unnötige Erwärmung der Spule zu unterbinden. Der Betreuer befestigt nun den Glaskörper in der Vorrichtung, bringt zwischen Lichtquelle und Polarisator eines der am Arbeitsplatz ausliegenden Interferenzfilter, entfernt die Hallsonde, und platziert hinter dem Analysator eine sensitive Photodiode zur Messung der Faraday-Rotation. Schalten Sie nun die Lichtquelle ein und stellen Sie die Transmissionsachsen des Polarisators und Analysators so ein, dass die Photodiode so gut wie kein Signal registriert. Lässt man nun einen Strom durch die Spule fließen, so detektiert die Photodiode aufgrund des Faraday-Effekts ein Signal. Um den Drehwinkel der Faraday-Rotation zu bestimmen, muss man jetzt die Transmissionsachse des Analysators bis zum Verschwinden des Signals drehen.

Bestimmen Sie für die Spulenströme  $I = \pm 0,5 \text{ A}$  bis  $I = \pm 3,0 \text{ A}$  in Schritten von  $|\Delta I| = 0,3 \text{ A}$  die jeweiligen Drehwinkel  $\Theta$ . Hierbei wiederum darauf achten, dass der Magnet nicht dauerhaft mit mehr als  $2 \text{ A}$  belastet wird. Tragen Sie die Mittelwerte der gemessenen Drehwinkel  $\Theta$  in Abhängigkeit von der Stromstärke  $I \sim B_{\text{eff}}$  graphisch auf und ermitteln Sie aus der Steigung der die Messpunkte am besten beschreibenden Geraden die Verdettsche Konstante.

Wiederholen Sie die im vorhergehenden Absatz geforderten Arbeitsschritte für die restlichen drei am Arbeitsplatz sich befindenden Interferenzfilter und tragen Sie die Verdettsche Konstante in Abhängigkeit von der jeweiligen Wellenlänge des in den Glaskörper eingestrahlten linear polarisierten Lichts auf. Ermitteln Sie schließlich mit dem bekannten Ausdruck für die Verdettsche Konstante (vgl. Anhang) den qualitativen Verlauf

der Dispersion des verwendeten Glaskörpers und vergleichen Sie das Ergebnis mit der bekannten Dispersion dieses Glaskörpers (Datenblatt liegt am Messplatz aus).

# Anhang

## 1 Grundlegende Bemerkungen zum Ausbreitungsverhalten elektromagnetischer Wellen in klassischen Dielektrika

Aus der Elektrodynamik ist bekannt, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist. Die Existenz dieser Wellen ist eine Konsequenz aus den Maxwellschen Gleichungen, welche das empirisch bewährte Fundament dieser Theorie bilden. Für nicht magnetische Medien, die weder freie Ladungen noch Ströme enthalten, sind sie gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Dabei bezeichnen  $\vec{D}$  die dielektrische Verschiebung,  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\vec{B}$  die magnetische Flussdichte und  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$  die magnetische Feldkonstante des Vakuums.

Die dielektrische Verschiebung ist gegeben durch

$$\vec{D} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\epsilon}_r \vec{E},\tag{1.2}$$

wobei  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$  die elektrische Feldkonstante des Vakuums und  $\overleftrightarrow{\epsilon}_r$  der dielektrische Tensor des Mediums sind.

Im Folgenden wird untersucht, wie sich eine ebene elektromagnetische Welle in einem Medium, welches die oben genannten Eigenschaften aufweist, fortpflanzt. Die elektrische Feldstärke und magnetische Flussdichte der Welle sind dabei gegeben durch den Realteil von

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Dabei sind  $\vec{E}_0$  die Amplitude der elektrischen Feldstärke,  $\vec{B}_0$  die Amplitude der magnetischen Flussdichte,  $\vec{k}$  der Wellenvektor und  $\omega$  die (Kreis-)Frequenz der Welle.

Die Ausbreitung der Welle erfolgt in die Richtung des Poynting-Vektors

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}\tag{1.4}$$

und damit in die Richtung des Energieflusses.

Da  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  mit dem Realteil von  $e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$  oszillieren, kann man  $\vec{\nabla} = i\vec{k}$  und  $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$  setzen, so dass aus den Maxwell-Gleichungen (1.1) folgt:

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{D} &= 0, \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{k} \times \vec{E} &= \omega \vec{B}, \\ \vec{k} \times \vec{B} &= -\omega \mu_0 \vec{D}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Damit lässt sich über die Lagebeziehung der Vektoren Folgendes aussagen:

Der Vektor  $\vec{D}$  liegt in der von  $\vec{k}$  und  $\vec{E}$  aufgespannten Ebene und steht senkrecht auf  $\vec{k}$ . Der Vektor  $\vec{B}$  steht senkrecht auf dieser Ebene. Daraus ergibt sich, dass der Poynting-Vektor  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$  zwar auch in

der von  $\vec{k}$  und  $\vec{E}$  aufgespannten Ebene liegt, seine Richtung aber stimmt im Allgemeinen nicht mit der des Wellenvektors  $\vec{k}$  überein. Denn  $\vec{k}$  steht generell senkrecht auf  $\vec{D}$ ,  $\vec{S}$  generell senkrecht auf  $\vec{E}$ , und nur in Sonderfällen sind  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  zueinander parallel.

Dies hat zur Konsequenz, dass die Welle die Energie des elektromagnetischen Feldes im Allgemeinen nicht in die Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  transportiert, sondern unter einem gewissen Winkel dazu. Sie breitet sich also im Allgemeinen schräg zu den Wellenfronten aus (vgl. Abb. 1.1).

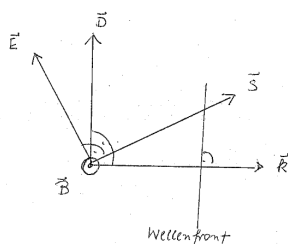


Abbildung 1.1: Lagebeziehung der Vektoren  $\vec{k}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{S}$  und  $\vec{B}$ . Die Vektoren  $\vec{k}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{S}$  liegen in einer Ebene und stehen in der genannten Reihenfolge paarweise aufeinander senkrecht. Der Vektor  $\vec{B}$  steht senkrecht auf der Zeichenebene und zeigt aus ihr heraus.

Offenbar weist die Welle nur dann das vertraute Propagationsverhalten auf, wenn die Vektoren  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  bzw.  $\vec{S}$  und  $\vec{k}$  zueinander parallel sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich die Welle entweder in einem optisch isotropen Medium ausbreitet oder wenn sie als sogenannte ordinäre Welle durch ein optisch anisotropes Medium propagiert.<sup>1</sup> Im ersten Fall ist der dielektrische Tensor  $\overleftrightarrow{\epsilon}_r$  des Mediums zu einem Skalar, der sogenannten relativen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_r$  entartet, im zweiten Fall reduziert er sich für die Ausbreitungsrichtung der ordinären Welle auf eine skalare Größe  $\epsilon'$ . In beiden Fällen sind dann die Vektoren  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  bzw.  $\vec{S}$  und  $\vec{k}$  zueinander parallel. Die Welle transportiert demnach die Energie des elektromagnetischen Feldes in die Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  und breitet sich daher senkrecht zu den Wellenfronten aus. Die Phasengeschwindigkeit der Welle in dem jeweiligen Medium ist dabei gegeben durch

$$c = \frac{c_0}{n} \quad \text{bzw.} \quad c' = \frac{c_0}{n'} \quad (1.6)$$

Dabei sind  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit und  $n$  bzw.  $n'$  die Brechungsindizes des optisch isotropen Mediums bzw. der ordinären Welle im optisch anisotropen Medium. Für die Brechungsindizes gilt:

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad \text{bzw.} \quad n' = \sqrt{\epsilon'} \quad (1.7)$$

<sup>1</sup>In einem optisch anisotropen Medium wie zum Beispiel Kalkspat breiten sich im Allgemeinen zwei verschiedene Wellen aus. Die eine Welle wird als ordinäre, die andere als extraordinäre Welle bezeichnet. Im Gegensatz zur ordinären Welle breitet sich die extraordinäre im Kristall zumeist auf die zuvor beschriebene ungewöhnliche Weise aus. Für bestimmte Ausbreitungsrichtungen weist sie jedoch das vertraute Propagationsverhalten auf und kann folglich als eine ordinäre Welle angesehen werden (vgl. Kapitel 3). Mit dem Terminus "ordinäre Welle" ist hier also zweierlei gemeint: die originäre ordinäre Welle und die zu einer ordinären Welle "entartete" extraordinäre Welle.

<sup>2</sup>Im Folgenden werden die Gl. (1.6) und (1.7) für eine Welle in einem optisch isotropen Medium hergeleitet. Ersetzt man in den folgenden Gleichungen  $\epsilon_r$  durch  $\epsilon'$ , erhält man die entsprechenden Ausdrücke für die ordinäre Welle im optisch anisotropen Medium. Kombiniert man die beiden letzten Gleichungen von (1.5) und berücksichtigt, dass für ein optisch isotropes Medium  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$  ist, erhält man:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}.$$

Unter Verwendung der Vektoridentität  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  ergibt sich:

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}.$$

Wegen  $\vec{k} \perp \vec{E}$  bzw.  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  folgt:

$$(k^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r) \vec{E} = \vec{0}.$$

Die nichttriviale Lösung dieser Gleichung lautet:

$$k = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r} \omega.$$

Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist dann gegeben durch

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}},$$

wobei  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist.

Mit der Definition des Brechungsindex

$$n = \frac{c_0}{c}$$

folgt:

$$c = \frac{c_0}{n}, \quad n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad (1.8)$$

## 2 Polarisationszustände des Lichts

Licht ist wie alle elektromagnetischen Wellen eine Transversalwelle. Für optisch isotrope Medien schwingt dabei die elektrische Feldstärke in einer Ebene senkrecht zum Wellenvektor  $\vec{k}$ .<sup>1</sup> Diese Ebene bezeichnet man als Polarisationsebene der Welle. Besitzt die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  eine wohldefinierte Richtung gegenüber dem Wellenvektor  $\vec{k}$ , spricht man von einer polarisierten Welle. Zerlegt man die Welle in zwei senkrecht zueinander stehende Basiswellen mit verschiedenen Amplituden und Phasen, lassen sich die verschiedenen Polarisationszustände der Welle darstellen. Eine ebene Lichtwelle, die sich in einem optisch isotropen Medium zum Beispiel in die positive z-Richtung ausbreitet, ist dann gegeben durch

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta) \vec{e}_y. \quad (2.1)$$

Dabei sind  $E_{0x}$  und  $E_{0y}$  die Amplituden der Basiswellen,  $\delta$  ihr relativer Phasenunterschied,  $k$  die Wellenzahl und  $\omega$  die (Kreis-)Frequenz der Welle.

### 2.1 Linear polarisiertes Licht

Man bezeichnet Licht<sup>2</sup> als linear polarisiert, wenn sich die Schwingungsrichtung der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  beim Durchlauf der Welle nicht ändert. Dies ist genau dann der Fall, wenn der relative Phasenunterschied zwischen den Basiswellen  $\delta = m \cdot \pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  beträgt.

Die resultierende Welle ist dann gegeben durch

$$\vec{E}(z, t) = (E_{0x} \vec{e}_x \pm E_{0y} \vec{e}_y) \cos(kz - \omega t), \quad (2.2)$$

wobei das Pluszeichen für geradzahliges, das Minuszeichen für ungeradzahliges  $m$  steht. Sie ist in Richtung des Vektors  $\vec{e} = \frac{E_{0x} \vec{e}_x \pm E_{0y} \vec{e}_y}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}}$  linear polarisiert.

### 2.2 Zirkular polarisiertes Licht

Man bezeichnet Licht als zirkular polarisiert, wenn die Spitze des elektrischen Feldstärkevektors  $\vec{E}$  beim Durchlauf der Welle eine kreisförmige Schraubenlinie um die Ausbreitungsrichtung beschreibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Basiswellen die gleiche Amplitude  $E_{0x} = E_{0y} := E_0$  haben und der relative Phasenunterschied  $\delta = \pm \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  beträgt.

Die resultierende Welle ist dann gegeben durch

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_{L,R}(z, t) = E_0 (\cos(kz - \omega t) \vec{e}_x \mp \sin(kz - \omega t) \vec{e}_y). \quad (2.3)$$

Blickt man in die negative z-Richtung, also gegen die Ausbreitungsrichtung der jeweiligen Welle, rotieren die Vektoren  $\vec{E}_{L,R}(z=0, t)$  in der xy-Ebene mit der (Kreis-)Frequenz  $\omega$  im Gegenuhrzeigersinn/Uhrzeigersinn auf einem Kreis um die z-Achse (vgl. Abb. 2.1). Man bezeichnet die Wellen daher als links- bzw. rechtszirkular polarisiert.

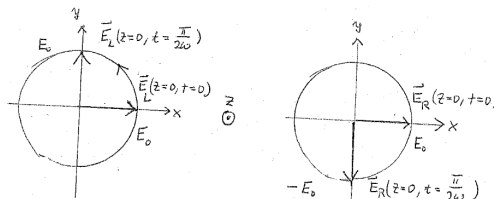


Abbildung 2.1: Rotation des elektrischen Feldstärkevektors einer links- bzw. rechtszirkular polarisierten Welle in einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der jeweiligen Welle.

Überlagert man zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen gleicher Amplitude und Frequenz, erhält man eine linear polarisierte Welle:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_L(z, t) + \vec{E}_R(z, t) = 2E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x. \quad (2.4)$$



Dieser Zusammenhang ist zum Beispiel für die Bestimmung des Drehvermögens optisch aktiver Substanzen von zentraler Bedeutung (vgl. Kap. 4).

### 2.3 Elliptisch polarisiertes Licht

Linear und zirkular polarisiertes Licht sind Spezialfälle des elliptisch polarisierten Lichts. In den meisten Fällen nämlich ergibt die durch Gl. (2.1) beschriebene Überlagerung der senkrecht zueinander stehenden Basiswellen eine elliptisch polarisierte Welle. Die Spitze des elektrischen Feldstärkevektors  $\vec{E}$  beschreibt dann beim Durchlauf der Welle eine ellipsenförmige Schraubenlinie um die Ausbreitungsrichtung. Blickt man in die negative  $z$ -Richtung, also gegen die Ausbreitungsrichtung der Welle, rotiert der Vektor  $\vec{E}(z = 0, t)$  in der  $xy$ -Ebene mit der (Kreis-)Frequenz  $\omega$  im oder gegen den Uhrzeigersinn auf einer Ellipse um die  $z$ -Achse. Die Gleichung der Ellipse ist gegeben durch

$$\frac{x^2}{E_{0x}^2} + \frac{y^2}{E_{0y}^2} - \frac{2 \cos(\delta)}{E_{0x} E_{0y}} xy = \sin^2(\delta).^3 \quad (2.5)$$

Beträgt der relative Phasenunterschied zwischen den Basiswellen  $\delta = m \cdot \pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , reduziert sich die Ellipsengleichung (2.5) auf

$$y = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}} \cdot x, \quad (2.6)$$

wobei das Pluszeichen für geradzahliges, das Minuszeichen für ungeradzahliges  $m$  steht. Der Vektor  $\vec{E}(z = 0, t)$  schwingt dann in der  $xy$ -Ebene entlang einer Geraden mit dem Richtungsvektor  $\vec{e} = \frac{E_{0x}\vec{e}_x \pm E_{0y}\vec{e}_y}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}}$ . Die

Welle  $\vec{E}(z, t)$  ist folglich linear polarisiert.

Falls die Basiswellen die gleiche Amplitude  $E_{0x} = E_{0y} := E_0$  haben und der relative Phasenunterschied  $\delta = \pm \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  beträgt, vereinfacht sich die Ellipsengleichung (2.5) auf

$$x^2 + y^2 = E_0^2. \quad (2.7)$$

Der Vektor  $\vec{E}(z = 0, t)$  rotiert dann in der  $xy$ -Ebene auf einem Kreis mit dem Radius  $E_0$  um die  $z$ -Achse. Die Welle  $\vec{E}(z, t)$  ist demnach zirkular polarisiert.

Aus den bisherigen Ausführungen folgt, dass man elliptisch polarisiertes Licht genau dann erhält, wenn gilt:  $E_{0x} = E_{0y} \wedge \delta \neq m \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  oder  $E_{0x} \neq E_{0y} \wedge \delta \neq m \cdot \pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

### 2.4 Natürliches Licht

Temperaturstrahler wie zum Beispiel Glühlampen emittieren Licht, in dem alle Schwingungsrichtungen des elektrischen Feldes gleich häufig vorkommen. Die Phasenbeziehungen zwischen den Komponenten verschiedener Richtung ändern sich dabei statistisch. Solches Licht heißt natürliches Licht oder unpolarisiertes Licht. Dies lässt sich damit erklären, dass beim Entstehungsprozess eine Vielzahl von Atomen einzelne Wellenzüge aussenden, deren Amplituden, Schwingungsrichtungen und Phasen nicht korreliert sind.

<sup>1</sup>Da die meisten Wechselwirkungen von elektromagnetischer Strahlung mit Materie rein elektrischer Natur sind, ist es ausreichend, sich auf die Schwingung des elektrischen Feldes zu beschränken. Das senkrecht zum elektrischen Feld oszillierende Magnetfeld wird stillschweigend mitgedacht.

<sup>2</sup>Mit dem Terminus "Licht" ist die durch Gl. 2.1 beschriebene ebene Welle gemeint.

<sup>3</sup>Zur Herleitung der Ellipsengleichung:

Man setze

$$x := E_x(z = 0, t) = E_{0x} \cos(\omega t),$$

$$y := E_y(z = 0, t) = E_{0y} \cos(\omega t - \delta).$$

Nach Anwendung des Additionstheorems und anschließender Umformung ergibt sich:

$$\cos(\omega t) = \frac{x}{E_{0x}},$$

$$\sin(\omega t) = \frac{\cos(\delta)}{E_{0x} \sin(\delta)} x - \frac{1}{E_{0y} \sin(\delta)} y.$$

Quadratur und Addition der beiden Gleichungen ergibt dann die Ellipsengleichung (2.5).

### 3 Doppelbrechung im Kalkspatkristall

In Gasen, Flüssigkeiten und amorphen Festkörpern hängt die Lichtgeschwindigkeit im Allgemeinen nicht von der Ausbreitungsrichtung und Polarisation des Lichts ab. Solche Stoffe nennt man optisch isotrop. Doppelbrechende Kristalle dagegen sind optisch anisotrop. Ein prominentes Beispiel für einen solchen Kristall ist Kalkspat ( $\text{CaCO}_3$ ), der zumeist in Form stumpfer Rhomboeder mit dreizähliger Symmetrieachse kristallisiert. Diese legt im Kristall eine optische Vorzugsrichtung fest, die man als optische Achse bezeichnet.

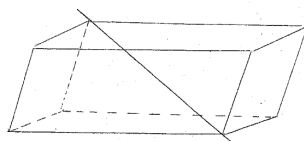


Abbildung 3.1: Kalkspatrhomboeder. Die eingezeichnete optische Achse ist zugleich die dreizählige Symmetrieachse des Kristalls. Dreht man den Kristall um jeweils  $120^\circ$  um diese Achse, nimmt er mit allen seinen physikalischen Eigenschaften eine deckungsgleiche Position ein. Mit der Bezeichnung "Achse" ist dabei keine materielle Gerade gemeint, wie es zum Beispiel die Rotationsachse eines Rades ist, sondern eine Richtung im Kristall. Alle zur optischen Achse bzw. Symmetrieachse parallelen Richtungen verdienen gleichermaßen die Bezeichnung optische Achse bzw. Symmetrieachse.

#### 3.1 Phänomen der Doppelbrechung

Fällt ein unpolarisierter Lichtstrahl senkrecht auf einen Kalkspatkristall, dessen optische Achse schräg zur Oberfläche liegt, wird er in zwei Teilstrahlen aufgespalten. Der eine Teilstrahl gehorcht dem Snelliusschen Brechungsgesetz und tritt ungebrochen durch den Kristall. Man bezeichnet ihn daher als ordinären Strahl (o-Strahl). Der andere Teilstrahl wird trotz des senkrechten Einfalls gebrochen und verlässt den Kristall parallelverschoben. Er folgt nicht dem Snelliusschen Brechungsgesetz und wird daher extraordinärer Strahl (e-Strahl) genannt. Seine Brechung erfolgt dabei in einer Ebene, die durch den einfallenden Strahl und die optische Achse des Kristalls aufgespannt wird. Diese Ebene bezeichnet man als den kristallographischen Hauptschnitt. Untersucht man den Polarisationszustand der beiden Teilstrahlen mit einem Analysator, so stellt man fest, dass sie senkrecht zueinander linear polarisiert sind. Der ordinäre Strahl schwingt dabei senkrecht zum kristallographischen Hauptschnitt, der extraordinäre Strahl im kristallographischen Hauptschnitt.

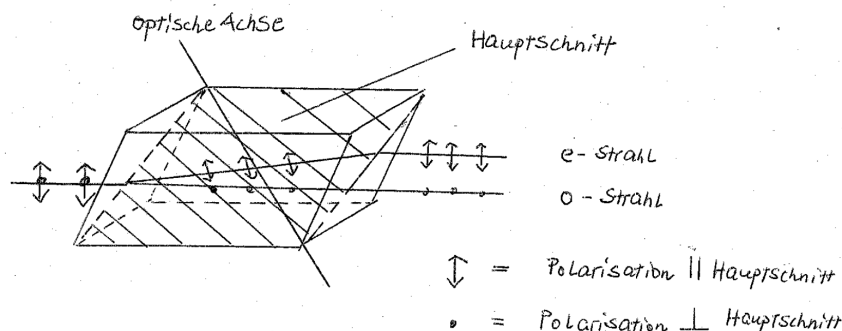


Abbildung 3.2: Doppelbrechung im Kalkspatrhomboeder (perspektivische Darstellung). Ein senkrecht einfallender unpolarisierter Lichtstrahl wird in zwei Teilstrahlen aufgespalten, die im kristallographischen Hauptschnitt liegen und senkrecht zueinander linear polarisiert sind.

Nicht immer wird das senkrecht eingestrahle Licht in die beiden Strahlen aufgespalten. Ist der Kalkspatkristall senkrecht zur optischen Achse geschnitten, tritt das senkrecht eingestrahle Licht ungebrochen und unpolarisiert durch den Kristall hindurch. Das Licht breitet sich demnach im Kristall wie in einem optisch isotropen Medium aus. Daher bezeichnet man die optische Achse auch als eine Richtung der optischen Isotropie. Ist der Kalkspatkristall parallel zur optischen Achse geschnitten, beobachtet man ebenfalls keine Aufspaltung des senkrecht eingestrahlenen Lichts. Dennoch unterscheidet sich dieser Fall grundsätzlich von dem zuvor beschriebenen. Während im ersten Fall die beiden Strahlen auf ununterscheidbare Weise durch den Kristall propagieren, eilt im zweiten Fall der extraordinäre Strahl aufgrund seiner größeren Geschwindigkeit dem ordinären Strahl voraus.<sup>1</sup> Nachdem beide Strahlen den Kristall verlassen haben, besteht zwischen ihnen ein Gangunterschied, der von der Vakuumwellenlänge des eingestrahlenen Lichts sowie von der Dicke des Kristalls und der Stärke seiner Doppelbrechung abhängt.<sup>2</sup> Mit diesem speziellen Kristallschnitt ist es möglich, den Polarisationszustand des eingestrahlenen Lichts zu modifizieren. Wird senkrecht zur optischen Achse zum Beispiel linear polarisiertes Licht eingestrahlt, dessen Polarisations Ebene mit der optischen Achse einen Winkel von  $45^\circ$  einschließt, treten die beiden Strahlen bei geeigneter Dicke des Kristalls mit einem Gangunterschied von einer Viertelwellenlänge aus dem Kristall aus. Das Licht ist dann zirkular polarisiert.

Die hier skizzierten optischen Phänomene lassen sich im Rahmen der klassischen Elektrodynamik gut erklären. Sie werden durch diese theoretische Fundierung allererst verständlich.

### 3.2 Elektrodynamik der Doppelbrechung

Doppelbrechende Kristalle weisen bezüglich ihrer dielektrischen Eigenschaften ein asymmetrisches Verhalten auf. Dies hat zur Folge, dass die relative Permittivität dieser Medien nun keine skalare Größe mehr ist, sondern ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe.<sup>3</sup> Er lässt sich durch eine  $3 \times 3$ -Matrix mit reellen Matrixelementen darstellen. Diese Matrix werde mit  $\overleftrightarrow{\epsilon}_r$  bezeichnet. Da der Tensor symmetrisch ist, gibt es ein kartesisches Koordinatensystem, in welchem die Matrix diagonal ist. Die rechtwinkligen Achsen dieses Koordinatensystems werden als Hauptachsen bezeichnet. Die Elemente der diagonalen Matrix sind die sogenannten Hauptdielektrizitätskonstanten  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  und  $\epsilon_z$ .

Für uniaxiale Kristalle wie zum Beispiel Kalkspat sind zwei der drei Hauptdielektrizitätskonstanten gleich. Setzt man zum Beispiel  $\epsilon_x = \epsilon_y := \epsilon_o$ , dann ist  $\epsilon_z := \epsilon_e$  die Hauptdielektrizitätskonstante entlang der durch diese Vereinbarung ausgezeichneten z-Achse. Diese Achse stellt dann die kristallographische Hauptachse bzw. optische Achse (OA) des Kristalls dar. Üblicherweise benutzt man anstelle der Hauptdielektrizitätskonstanten  $\epsilon_o$  und  $\epsilon_e$  die zugehörigen Hauptbrechungsindizes  $n_o = \sqrt{\epsilon_o}$  und  $n_e = \sqrt{\epsilon_e}$ .

Man betrachte eine punktförmige Quelle, die im Inneren des Kalkspatkristalls eine ebene elektromagnetische Welle emittiert. Die elektrische Feldstärke der Welle ist dabei gegeben durch den Realteil von

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \quad (3.1)$$

Dabei sind  $\vec{E}_0$  die Amplitude der elektrischen Feldstärke,  $\vec{k}$  der Wellenvektor und  $\omega$  die (Kreis-)Frequenz der Welle.

Die dielektrische Verschiebung ist gegeben durch

$$\vec{D} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\epsilon}_r \vec{E}, \quad (3.2)$$

wobei  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$  die elektrische Feldkonstante des Vakuums und  $\overleftrightarrow{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$  der dielektrische Tensor des Kalkspatkristalls sind.

Da  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  mit dem Realteil von  $e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$  oszillieren, kann man in der Wellengleichung

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

$\vec{\nabla} = i\vec{k}$  und  $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$  setzen und erhält:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu_0 \vec{D}. \quad (3.4)$$

Mit Gl. (3.2) und unter Verwendung der Vektoridentität  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  folgt:

$$\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \overleftarrow{\epsilon}_r \vec{E}. \quad (3.5)$$

Dabei ist  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$  bzw.  $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$  lässt sich der Ausdruck  $\vec{k} \cdot \vec{E}$  in Gl. (3.5) umformen zu

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = k_3 E_3 \left(1 - \frac{n_e^2}{n_o^2}\right). \quad (3.6)$$

Gl. (3.5) ist dann gegeben durch

$$k_3 E_3 \left(1 - \frac{n_e^2}{n_o^2}\right) \vec{k} + k^2 \left(\frac{\overleftarrow{\epsilon}_r}{n^2} - 1\right) \vec{E} = \vec{0}, \quad (3.7)$$

wobei  $n = \frac{c_0 k}{\omega}$  der noch unbestimmte Brechungsindex der Welle ist. Die i-te Komponente von Gl. (3.7) lautet:

$$k_3 E_3 \left(1 - \frac{n_e^2}{n_o^2}\right) k_i + k^2 \left(\frac{\overleftarrow{\epsilon}_r}{n^2}\right)_{ii} E_i = 0. \quad (3.8)$$

Der Index i nimmt dabei die Werte 1,2,3 an.

Die linke Seite von Gl. (3.8) lässt sich als Multiplikation einer Matrix mit dem Vektor  $\vec{E}$  darstellen:

$$\begin{pmatrix} k^2 \left(\frac{n_o^2}{n^2} - 1\right) & 0 & k_1 k_3 \left(1 - \frac{n_e^2}{n_o^2}\right) \\ 0 & k^2 \left(\frac{n_o^2}{n^2} - 1\right) & k_2 k_3 \left(1 - \frac{n_e^2}{n_o^2}\right) \\ 0 & 0 & k^2 \left(\frac{n_e^2}{n^2} - 1\right) + k_3^2 \left(1 - \frac{n_e^2}{n_o^2}\right) \end{pmatrix} \vec{E} = \vec{0}. \quad (3.9)$$

Dies ist ein homogenes, lineares Gleichungssystem für die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  der Welle. Es hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Matrix verschwindet. Dies führt dann auf eine biquadratische Gleichung in  $n^2$ :

$$k^4 (n_o^2 - n^2)^2 (k^2 n_o^2 n_e^2 - (\overleftarrow{\epsilon}_r \vec{k}) \vec{k} n^2) = 0. \quad (3.10)$$

Die physikalisch sinnvollen Lösungen von Gl. (3.10) lauten:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_o, \\ n_2 &= \frac{n_o n_e k}{\sqrt{(\overleftarrow{\epsilon}_r \vec{k}) \vec{k}}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für die Welle gibt es demnach zwei Brechungsindizes, die sich im Allgemeinen voneinander unterscheiden. Dies hat zur Konsequenz, dass sich die Welle im Kristall in zwei verschiedene Wellen aufspaltet, die unter Umständen entartet sein können. Setzt man die beiden Brechungsindizes in die Wellengleichung (3.9) ein, lassen sich die charakteristischen Eigenschaften der beiden Wellen bestimmen. Aus noch ersichtlich werdenden Gründen bezeichnet man dabei die mit dem Brechungsindex  $n_1$  korrespondierende Welle als ordinäre Welle (o-Welle) und die zum Brechungsindex  $n_2$  gehörende als extraordinäre Welle (e-Welle).

### o-Welle

Für  $n = n_1$  reduziert sich die Wellengleichung (3.9) auf

$$\left(1 - \frac{n_e^2}{n_o^2}\right) \begin{pmatrix} k_1 k_3 \\ k_2 k_3 \\ k_3^2 - k^2 \end{pmatrix} E_{o3} = \vec{0}, \quad n_o \neq n_e, \quad \vec{k} \neq \vec{0}. \quad (3.12)$$

Gl. (3.12) ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$E_{o3} = 0 \forall \vec{k}.^4 \quad (3.13)$$

Die elektrische Feldstärke der o-Welle ist dann gegeben durch

$$\vec{E}_o = \begin{pmatrix} E_{o1} \\ E_{o2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Für die dielektrische Verschiebung gilt dann:

$$\vec{D}_o = \epsilon_o \overleftarrow{\epsilon}_r \vec{E}_o = \epsilon_o n_o^2 \vec{E}_o. \quad (3.15)$$

Die Vektoren  $\vec{D}_o$  und  $\vec{E}_o$  sind demnach zueinander parallel. Aus Kapitel 1 ist bekannt, dass dann die Vektoren  $\vec{S}_o$  und  $\vec{k}$  ebenfalls zueinander parallel sind. Die o-Welle weist daher das vertraute Propagationsverhalten auf. Sie breitet sich im Kristall mit der konstanten Phasengeschwindigkeit

$$c_1 = c_o = \frac{c_o}{n_o} \quad (3.16)$$

in Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  aus. Die elektrische Feldstärke der o-Welle oszilliert dabei in einer Ebene senkrecht zum kristallographischen Hauptschnitt, der durch den Wellenvektor  $\vec{k}$  und den Einheitsvektor  $\vec{OA}$  in Richtung der optischen Achse (hier: z-Achse) aufgespannt wird:

$$\vec{D}_o \perp \vec{k}, \vec{OA} \Rightarrow \vec{E}_o \perp \vec{k}, \vec{OA} \Rightarrow \vec{D}_o, \vec{E}_o \parallel \vec{n}_{HS} = \vec{k} \times \vec{OA} = \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Dabei bezeichnet  $\vec{n}_{HS}$  den Normalenvektor des kristallographischen Hauptschnitts. Die o-Welle ist demnach linear polarisiert. Zwischen den Komponenten  $E_{o1}$  und  $E_{o2}$  bzw.  $D_{o1}$  und  $D_{o2}$  besteht dann ein wohldefinierter Zusammenhang:

$$k_i E_{oi} = k_i D_{oi} = 0, i = 1, 2.^5 \quad (3.18)$$

### e-Welle

Für  $n = n_2$  reduziert sich die Wellengleichung (3.9) auf

$$\begin{pmatrix} (k_1^2 + k_2^2) \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right) E_{e1} + k_1 k_3 \left( 1 - \frac{n_e^2}{n_o^2} \right) E_{e3} \\ (k_1^2 + k_2^2) \left( \frac{n_o^2}{n_e^2} - 1 \right) E_{e2} + k_2 k_3 \left( 1 - \frac{n_e^2}{n_o^2} \right) E_{e3} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, n_o \neq n_e, \vec{k} \neq \vec{0}. \quad (3.19)$$

Nach einigen Umformungen erhält man:

$$(k_2 E_{e1} - k_1 E_{e2}) \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (3.20)$$

Gl. (3.20) ist äquivalent zu

$$(\vec{n}_{HS} \vec{E}_e) \vec{n}_{HS} = \vec{0}, \quad (3.21)$$

wobei  $\vec{n}_{HS} = \vec{k} \times \vec{OA} = \begin{pmatrix} k_2 \\ -k_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  der Normalenvektor des kristallographischen Hauptschnitts ist.

Gl. (3.21) ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$\vec{n}_{HS} = \vec{0} \vee \vec{n}_{HS} \perp \vec{E}_e, \text{ falls } \vec{n}_{HS} \neq \vec{0}. \quad (3.22)$$

Für  $\vec{n}_{\text{HS}} = \vec{0}$  bzw.  $\vec{k} \parallel \vec{OA}$  ist der kristallographische Hauptschnitt nicht definiert. In diesem Fall reduziert sich der Brechungsindex der e-Welle auf  $n_2 = n_o$ . Die e-Welle ist dann nicht mehr von der o-Welle zu unterscheiden. Beide Wellen breiten sich daher im Kristall mit derselben Phasengeschwindigkeit  $c_1 = c_2 = \frac{c_0}{n_o}$  in die Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  aus. Die Doppelbrechung ist entartet.

Für  $\vec{n}_{\text{HS}} \neq \vec{0}$  bzw.  $\vec{k} \nparallel \vec{OA}$  ist der kristallographische Hauptschnitt erklärt. Aus Gl. (3.22) folgt dann, dass die elektrische Feldstärke der e-Welle im kristallographischen Hauptschnitt oszilliert. Die e-Welle ist demnach linear polarisiert, wobei ihre Polarisationssebene wegen (3.17) senkrecht auf der Polarisationssebene der o-Welle steht:

$$\vec{E}_e \vec{E}_o = 0 \quad \forall \vec{k} \nparallel \vec{OA}. \quad (3.23)$$

Das Propagationsverhalten der e-Welle ergibt sich aus der Lagebeziehung der Vektoren  $\vec{k}$ ,  $\vec{D}_e$ ,  $\vec{E}_e$  und  $\vec{S}_e$ . Aus Kapitel 1 ist bekannt, dass sie in einer Ebene liegen und in der angegebenen Reihenfolge paarweise aufeinander senkrecht stehen. Diese Ebene ist der kristallographische Hauptschnitt. Für  $\vec{k} \nparallel \vec{OA}$  gilt dabei:

$$D_{e3}, E_{e3} \neq 0. \quad (3.24)$$

Die Vektoren  $\vec{D}_e$  und  $\vec{E}_e$  bzw.  $\vec{S}_e$  und  $\vec{k}$  sind dann im Allgemeinen nicht mehr zueinander parallel. Die e-Welle breitet sich daher im Kristall mit der richtungsabhängigen Phasengeschwindigkeit

$$c_2(\vec{k}) = \frac{c_0}{n_2(\vec{k})}$$

schräg zu ihren Wellenfronten aus. Ihre Ausbreitungsrichtung stimmt dann nicht mehr mit der der o-Welle überein.

Für  $\vec{k} \perp \vec{OA}$  weist die e-Welle jedoch das vertraute Propagationsverhalten auf. Wegen  $\vec{D}_e \perp \vec{k}$  zeigt die dielektrische Verschiebung in die Richtung der optischen Achse:

$$\vec{D}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_{e3} \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Die elektrische Feldstärke der e-Welle ist dann gegeben durch

$$\vec{E}_e = \frac{1}{\epsilon_0} (\overleftarrow{\epsilon}_r)^{-1} \vec{D}_e = \frac{1}{\epsilon_0 n_e^2} \vec{D}_e, \quad (3.26)$$

wobei  $(\overleftarrow{\epsilon}_r)^{-1} = \begin{pmatrix} n_o^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & n_o^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & n_e^{-2} \end{pmatrix}$  der zu  $\overleftarrow{\epsilon}_r$  inverse Tensor ist.

Die Vektoren  $\vec{D}_e$  und  $\vec{E}_e$  bzw.  $\vec{S}_e$  und  $\vec{k}$  sind demnach zueinander parallel. Die e-Welle breitet sich daher im Kristall mit der Phasengeschwindigkeit

$$c_2 = \frac{c_0}{n_e} \quad (3.27)$$

in die Richtung des Wellenvektors  $\vec{k}$  und damit in dieselbe Richtung wie die o-Welle aus. Wegen  $n_e < n_o$  ist die Phasengeschwindigkeit der e-Welle dabei größer als die der o-Welle. Dadurch entsteht zwischen den beiden Wellen eine Phasendifferenz, die proportional zur Länge des Strahlwegs anwächst und gegeben ist durch

$$\Delta\phi = \Delta(kd) = \frac{\omega}{c_0} d |n_e - n_o|, \quad (3.28)$$

wobei  $d$  die Länge des Strahlwegs und der Ausdruck  $n_e - n_o$  die Stärke der Doppelbrechung bezeichnen. In der Praxis steht man häufig vor der Aufgabe, eine bestimmte Phasendifferenz zu generieren, zum Beispiel  $\Delta\Phi = \frac{\pi}{2}$ . Die dafür benötigte Länge des Strahlwegs bzw. Dicke des Kristalls beträgt dann  $d = \frac{\lambda_0}{4} |n_e - n_o|$ , wobei  $\lambda_0$  die Vakuumwellenlänge der einfallenden Welle ist. Kristallscheibchen mit dieser Dicke nennt man  $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen.

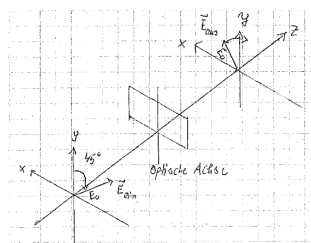


Abbildung 3.3: Ein  $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen, das parallel zur optischen Achse (hier: y-Achse) geschnitten ist. Das Plättchen wandelt eine senkrecht einfallende Welle, deren Polarisationssebene einen Winkel von  $45^\circ$  mit der optischen Achse einschließt, in eine zirkular polarisierte um:

$$\vec{E}_{\text{ein}}(z, t) = \text{Re}\left[\frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}\right] = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t),$$

$$\vec{E}_{\text{aus}}(z, t) = \text{Re}\left[\frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi/2} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}\right] = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ -\sin(kz - \omega t) \end{pmatrix} = \vec{E}_L(z, t).$$

<sup>1</sup>Bei negativ-einachsigen Kristallen wie zum Beispiel Kalkspat ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des extraordinären Strahls größer als die des ordinären Strahls. Nur in Richtung der optischen Achse stimmen die Geschwindigkeiten der beiden Strahlen überein.

<sup>2</sup>Die Stärke der Doppelbrechung uniaxialer Kristalle ist durch die Differenz der beiden Hauptbrechungsindizes gegeben. Für Kalkspat beträgt sie  $\Delta n = n_e - n_o = -0,172$  ( $\lambda = 589,3 \text{ nm}$ ). Aufgrund des negativen Vorzeichens ist Kalkspat ein negativ-uniaxialer Kristall.

<sup>3</sup>Man beachte die Analogie zur Mechanik. Dort wird für anisotrope Medien der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung durch einen Tensor, den sogenannten Elastizitätsmodul beschrieben.

<sup>4</sup>In mathematischer Hinsicht ist Gl. (3.12) auch dann erfüllt, wenn gilt:

$$\vec{k} \parallel \vec{OA}, E_{o3} \text{ beliebig.}$$

Dabei bezeichnet  $\vec{OA}$  den Einheitsvektor in Richtung der optischen Achse (z-Achse). Es ist also  $\vec{OA} = \vec{e}_z$ .

In physikalischer Hinsicht jedoch gilt:

$$\vec{k} \parallel \vec{OA} \Rightarrow E_{o3} = 0.$$

$$\text{Beweis: } \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_o = 0 \text{ (Maxwell)} \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{D}_o = 0 = k_3 D_{o3} = k_3 \epsilon_0 n_e^2 E_{o3} \Rightarrow E_{o3} = 0.$$

<sup>5</sup>Für  $\vec{k} \parallel \vec{OA}$  sind die Komponenten  $E_{o1}$  und  $E_{o2}$  bzw.  $D_{o1}$  und  $D_{o2}$  frei wählbar. Die o-Welle ist dann unpolarisiert.



## 4 Optische Aktivität einer Zuckerlösung

Tritt linear polarisiertes Licht durch eine Zuckerlösung, wird die Polarisations Ebene des Lichts um einen Winkel  $\vartheta$  gedreht (vgl. Abb. 4.1).

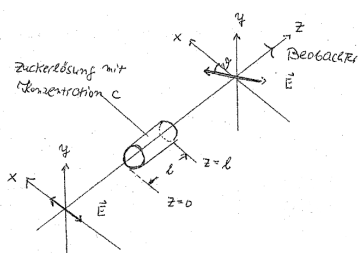


Abbildung 4.1: Polarisationsdrehung aufgrund optischer Aktivität.

Vereinbarungsgemäß ist der Drehwinkel positiv bzw. negativ, wenn sich die Polarisations Ebene des Lichts für den Beobachter nach rechts bzw. nach links dreht. Die optisch aktive Substanz wird dann als rechts- bzw. linksdrehend bezeichnet.

Für den Drehwinkel findet man auf experimentellem Weg, dass  $\vartheta \sim c$  und  $\vartheta \sim l$  ist:

$$\vartheta = [\vartheta]_T^\lambda \cdot c \cdot l. \quad (4.1)$$

Die Proportionalitätskonstante  $[\vartheta]_T^\lambda$  heißt spezifischer Drehwinkel und ist, wie bereits die Notation vermuten lässt, eine von der Wellenlänge des eingestrahlt Lichts und der Temperatur der Substanz abhängige Stoffkonstante mit der Einheit  $\text{rad m}^2 \text{kg}^{-1}$ . In der Literatur sind die spezifischen Drehwinkel diverser Zuckerlösungen zumeist für  $\lambda = 589,3 \text{ nm}$  (Na-D-Linie),  $T = 20^\circ \text{C}$ ,  $c = \frac{1 \text{ g}}{100 \text{ ml}}$  und  $l = 1 \text{ dm}$  angegeben. Ist der spezifische Drehwinkel einer gelösten Substanz bekannt, lässt sich unter gleichen Versuchsbedingungen eine beliebige Konzentration der Substanz durch Messung des Drehwinkels  $\vartheta$  bestimmen.

Auch wenn die optische Aktivität von Zuckerlösungen nur auf quantentheoretischer Ebene erklärbar ist, lässt sie sich dennoch qualitativ verständlich machen. Aufgrund ihrer Chiralität weisen Zuckermoleküle eine schraubenförmige Gestalt auf und werden je nach Schraubensinn auf unterschiedliche Weise mit einer einfallenden linear polarisierten Welle in Wechselwirkung treten. Die folgende Abbildung zeigt die Interaktion einer in positive z-Richtung propagierenden Welle, welche entlang der x-Achse linear polarisiert ist, mit einem rechts- bzw. linksschraubigem Zuckermolekül. Das Molekül besitzt kein Inversionszentrum, seine Achse verläuft parallel zum elektrischen Feld der einfallenden Welle. Diese ist gegeben durch

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x, \quad \vec{B}(z, t) = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_y. \quad (4.2)$$

Dabei sind  $\vec{E}(z, t)$  und  $\vec{B}(z, t)$  über die Maxwell-Gleichung  $\vec{\nabla} \times \vec{E}(z, t) = -\frac{\partial \vec{B}(z, t)}{\partial t}$  miteinander verknüpft.

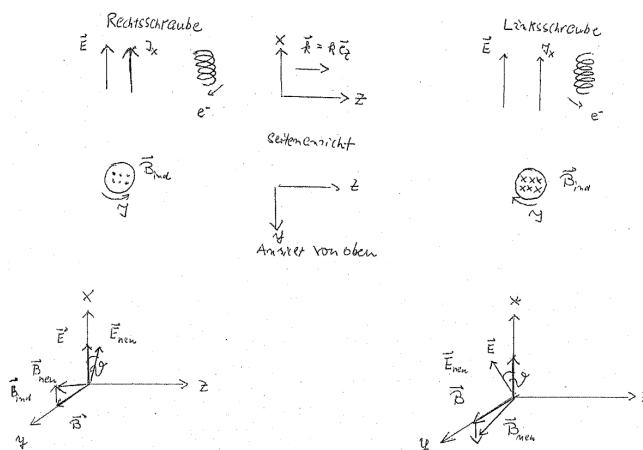


Abbildung 4.2: Optische Aktivität. Erklärung der Drehung der Polarisationssebene von linear polarisiertem Licht durch schraubenförmige Moleküle.

Unabhängig vom Drehsinn der Schraube wird das elektrische Feld einen Strom  $I_x$  in  $x$ -Richtung induzieren. Da dieser Strom von einem schraubenförmigen Molekül geleitet wird, ist der Strom in  $x$ -Richtung mit Stromkomponenten in  $y$ - und  $z$ -Richtung verknüpft. Entsprechend beobachtet man bei Blickrichtung längs der Schraubenachse einen Kreisstrom in der  $yz$ -Ebene, dessen Umlaufsinn vom Drehsinn des schraubenförmigen Zuckermoleküls abhängt. Diese Kreisströme induzieren ihrerseits Magnetfelder  $\vec{B}_{\text{ind}}$ , die je nach Drehsinn der Schraube in bzw. gegen die  $x$ -Richtung orientiert sind. Das Magnetfeld  $\vec{B}$  wird durch die Wirkung der Moleküle verändert werden. Da  $|\vec{B}_{\text{ind}}|$  klein gegenüber  $|\vec{B}|$  ist, beobachtet man im Wesentlichen nur eine Drehung des Magnetfeldvektors  $\vec{B}$ . Über die Beziehung  $\vec{B} \perp \vec{E}$  (Maxwell) erfolgt eine simultane Drehung der Polarisationssebene des elektrischen Feldes  $\vec{E}$ .

Berücksichtigt man, dass in formaler Hinsicht jede linear polarisierte Welle als eine Superposition von einer links- und rechtszirkular polarisierten Welle dargestellt werden kann, lässt sich das optische Drehvermögen einer Zuckerlösung auch wie folgt deuten: Die links- und rechtszirkular polarisierten Moden der linear polarisierten Welle propagieren mit verschiedenen Geschwindigkeiten durch die Lösung und geraten dabei sukzessive außer Phase, wodurch die Polarisationssebene der resultierenden linear polarisierten Welle um den Winkel  $\vartheta$  gedreht erscheint. Offenbar spüren die zirkularen Moden beim Durchgang durch die Zuckerlösung verschiedene Brechungsindizes  $n_L$  und  $n_R$ . Und in der Tat: Zuckermoleküle sind aufgrund ihrer Chiralität zirkular doppelbrechend. Damit lässt sich der Drehwinkel  $\vartheta$  und insbesondere seine Abhängigkeit von der Wellenlänge des eingestrahlten Lichts bestimmen.

Hierfür wird die in positive  $z$ -Richtung einlaufende linear polarisierte Welle  $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x$  in ihre links- und rechtszirkular polarisierten Moden zerlegt:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_L(z,t) + \vec{E}_R(z,t) = \frac{E_0}{2} \left[ \begin{pmatrix} \cos(k_L z - \omega t) \\ -\sin(k_L z - \omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(k_R z - \omega t) \\ \sin(k_R z - \omega t) \end{pmatrix} \right]. \quad (4.3)$$

Dabei bezeichnen  $k_{L,R}$  die Wellenzahlen der links- und rechtszirkular polarisierten Moden. Unter Verwendung diverser Additionstheoreme erhält man:

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos\left(\frac{k_R + k_L}{2} z - \omega t\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k_R - k_L}{2} z\right) \\ \sin\left(\frac{k_R - k_L}{2} z\right) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Bei  $z = 0$  tritt die Welle in die Zuckerlösung ein:

$$\vec{E}(0,t) = E_0 \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Die einfallende Welle ist entlang der  $x$ -Achse linear polarisiert (vgl. oben).

Bei  $z = l$  tritt die Welle aus der Zuckerlösung aus:

$$\vec{E}(l, t) = \vec{E}_0 \cos\left(\frac{k_R + k_L}{2}l - \omega t\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k_R - k_L}{2}l\right) \\ \sin\left(\frac{k_R - k_L}{2}l\right) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Die Polarisationssebene der einfallenden linear polarisierten Welle hat sich für den gegen die Quelle blickenden Beobachter gedreht. Mit der getroffenen Vereinbarung, dass der Drehwinkel positiv ist, wenn sich die Polarisationssebene des Lichts für diesen Beobachter nach rechts dreht, ist der Drehwinkel gegeben durch

$$\vartheta = -\frac{k_R - k_L}{2}l. \quad (4.7)$$

Mit  $k_{L,R} = n_{L,R} \cdot k = n_{L,R} \frac{2\pi}{\lambda}$  folgt:

$$\vartheta = \frac{\pi}{\lambda}(n_L - n_R)l. \quad (4.8)$$

Darin ist  $\lambda$  die Vakuumwellenlänge des eingestrahlt Lichts. Der Drehwinkel einer optisch aktiven Zuckerlösung wird also mit abnehmender Wellenlänge größer (Rotationsdispersion). Die Größe  $|n_L - n_R|$  wird als zirkulare Doppelbrechung der optisch aktiven Substanz bezeichnet.

## 5 Faraday-Effekt

Tritt linear polarisiertes Licht durch ein Stück Glas, das einem starken und konstanten Magnetfeld  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  ausgesetzt ist, wird die Polarisations Ebene des Lichts um einen Winkel  $\vartheta$  gedreht.

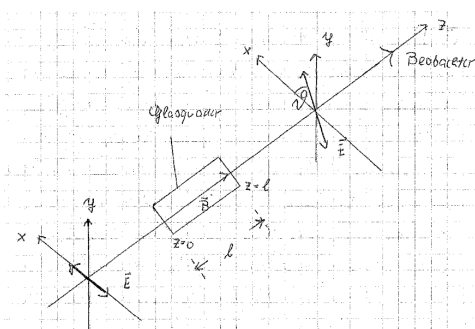


Abbildung 5.1: Polarisationsdrehung aufgrund des Faraday-Effekts.

Vereinbarungsgemäß ist der Drehwinkel positiv bzw. negativ, wenn sich die Polarisations Ebene des Lichts für den Beobachter nach links bzw. rechts dreht. Das Licht breitet sich dann parallel bzw. antiparallel zum Magnetfeld durch den Glasstab aus. Für den Drehwinkel findet man auf experimentellem Weg, dass  $\vartheta \sim B$  und  $\vartheta \sim l$  ist:

$$\vartheta = VB l. \quad (5.1)$$

Die Proportionalitätskonstante  $V$  heißt Verdet-Konstante. Sie ist für diamagnetische Stoffe positiv und wird üblicherweise in der Einheit Bogenminuten  $G^{-1} \text{ cm}^{-1}$  ( $1G \approx 10^{-4} \text{ T}$ ) angegeben. Die Verdet-Konstante hängt vor allem von der Wellenlänge des eingestrahlt Lichts und den Dispersionseigenschaften des Mediums ab. Die theoretische Behandlung des Faraday-Effekts muss daher die wesentlichen Dispersionseigenschaften des Mediums sowie die Auswirkungen des Magnetfeldes auf die atomaren Energieniveaus miteinbeziehen.

### 5.1 Dispersion im Glas

Im Versuch wird als Medium ein Glasstab verwendet. Glas ist ein amorpher Festkörper, der im Wesentlichen aus  $\text{SiO}_2$  und unterschiedlichen Zusatzstoffen besteht. Es ist im sichtbaren Spektralbereich transparent und besitzt verschiedene optische Übergänge (Absorptionsbanden) sowohl im Infraroten als auch im Ultravioletten. Die optischen Eigenschaften werden durch die Dispersion, also den im Allgemeinen komplexen Brechungsindex  $\tilde{n}(\lambda) = n(\lambda) + i\kappa(\lambda)$  beschrieben. Die Dispersionskurve des Realteils von  $\tilde{n}(\lambda)$  im sichtbaren Spektralbereich ist allein bestimmt durch alle hochenergetischen, im Ultravioletten liegenden optischen Übergänge im Glas. Fasst man diese zu einem einzigen optischen Übergang, der sogenannten Modellresonanz zusammen, ergibt sich schematisch die in folgender Abbildung dargestellte Dispersionskurve.

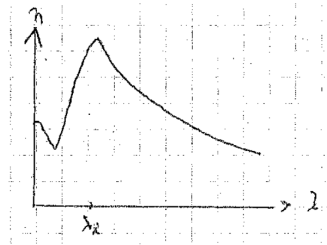


Abbildung 5.2: Dispersionskurve der Modellresonanz. Im Bereich der Resonanz erhält man anormale Dispersion, außerhalb der Resonanz normale Dispersion, d.h. eine Abnahme des Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge ( $\frac{dn}{d\lambda} < 0$ ).

## 5.2 Ursache der Faraday-Rotation

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass die Faraday-Rotation auf magnetfeldinduzierter zirkularer Doppelbrechung beruht, die ihre Ursache in der Zeemann-Aufspaltung der Modellresonanz hat. Dabei ist es ausreichend, sich auf den sogenannten normalen Zeemann-Effekt zu beschränken, der nur bei Übergängen zwischen atomaren Zuständen mit verschwindendem Gesamtspin auftritt. Ein von außen angelegtes Magnetfeld wirkt dann nur noch auf den Bahndrehimpuls der Elektronen (reiner Bahnmagnetismus).

Der normale Zeemann-Effekt lässt sich im Rahmen der klassischen Elektronentheorie gut beschreiben. Dabei wird das den Atomkern mit der (Kreis-)Frequenz  $\omega$  umkreisende Elektron als linearer Oszillator aufgefasst, der zufällig zu den Feldlinien eines von außen angelegten homogenen Magnetfeldes  $\vec{B}$  ausgerichtet ist. Die lineare Schwingung des Elektrons wird in zwei Oszillationen, parallel und senkrecht zum Magnetfeld zerlegt. Die Oszillation senkrecht zum Magnetfeld lässt sich ihrerseits als eine Superposition zweier entgegengesetzt zirkularer Schwingungen darstellen, so dass die klassische Theorie von insgesamt drei sogenannten Ersatzelektronen spricht.

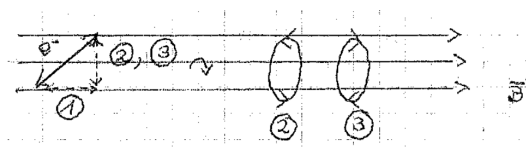


Abbildung 5.3: Ersatzelektronen zur klassischen Erklärung des normalen Zeemann-Effekts.

Das in Feldrichtung schwingende Ersatzelektron (1) erfährt nicht die Wirkung der magnetischen Kraft  $\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$ , wird also nicht vom Magnetfeld beeinflusst und emittiert folglich Licht mit der ursprünglichen Frequenz  $\omega$ , das parallel zum Magnetfeld linear polarisiert und nur senkrecht zum Feld beobachtbar ist ( $\pi$ -Emissionen).

Die beiden entgegengesetzt zirkular und senkrecht zum Magnetfeld schwingenden Ersatzelektronen (2) und (3) spüren die Wirkung der magnetischen Kraft und werden je nach Umlaufsinn bzw. Magnetfeldorientierung positiv oder negativ beschleunigt, so dass sie mit einer um  $\pm\Delta\omega_{\text{Zeemann}} = \omega_L = \frac{eB}{2m}$  geänderten Frequenz (Larmorfrequenz) entgegengesetzt zirkular polarisiertes Licht in Richtung des Magnetfeldes emittieren. Bei transversaler Ansicht erscheint diese Strahlung als senkrecht zum Magnetfeld linear polarisiert ( $\sigma^\pm$ -Emissionen). Erfolgt die Beobachtung senkrecht zum Magnetfeld (transversale Beobachtung), sind demnach alle drei Komponenten der Strahlung sichtbar; erfolgt sie in Richtung des Magnetfeldes (longitudinale Beobachtung), sind nur die linkszirkular ( $\sigma^+$ ) und rechtszirkular ( $\sigma^-$ ) polarisierten Emissionen sichtbar.

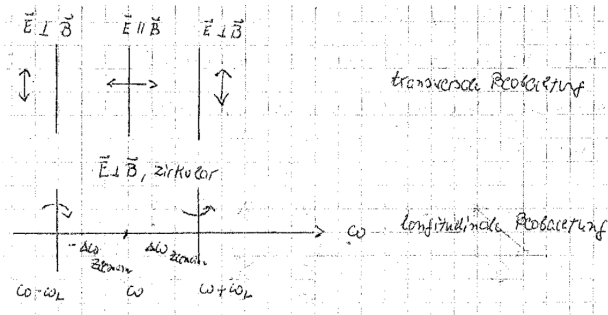


Abbildung 5.4: Normaler Zeemann Effekt. Aufspaltungsbild und Polarisation einer Spektrallinie mit der Mittenfrequenz  $\omega$  in einem homogenen Magnetfeld  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  bei transversaler und longitudinaler Beobachtung. Die Aufspaltung beträgt  $\Delta\omega_{\text{Zeemann}} = \omega_L$ .

Die für den Verlauf der Dispersionskurve verantwortliche Modellresonanz wird, insofern eine Entartung der Energieniveaus bezüglich der magnetischen Quantenzahl  $m_l$  vorliegt, im externen Magnetfeld  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  aufspalten. Aus der Quantenmechanik ist bekannt, dass die  $(2l + 1)$ -fach entarteten  $m_l$ -Zustände bei vorgegebenen  $n, l$ -Werten in die  $2l + 1$  äquidistanten Zeemann-Niveaus aufspalten. Dabei bezeichnen  $n, l$  und  $m_l$  die Haupt-, die Drehimpuls- und die magnetische Quantenzahl des Drehimpulses. Der energetische Abstand zwischen zwei benachbarten Zeemann-Niveaus beträgt

$$\Delta E_{\text{Zeemann}} = \hbar\Delta\omega_{\text{Zeemann}} = \hbar\omega_L. \tag{5.2}$$

Dabei bezeichnet  $\omega_L = \frac{eB}{2m}$  die Larmorfrequenz. Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch die Aufhebung der Entartung der Energieniveaus im Magnetfeld  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  sowie mögliche  $\sigma^+$  und  $\sigma^-$ -Übergänge entsprechend der dafür geltenden Auswahlregeln  $\Delta l = \mp 1$  und  $\Delta m_l = \mp 1$ .<sup>1</sup>

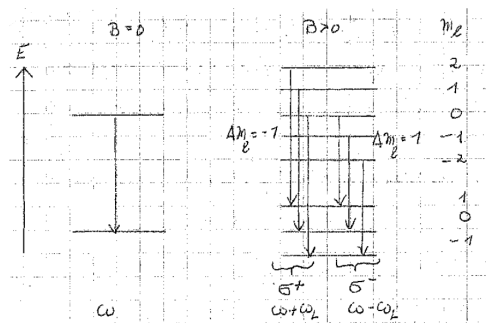


Abbildung 5.5: Beispiel für die Aufhebung der Entartung der Energieniveaus im axialen Magnetfeld.

Die jeweils drei  $\sigma^+$ -bzw.  $\sigma^-$ -Übergänge haben die gleiche Energie und lassen sich daher zu insgesamt zwei Resonanzübergängen  $\sigma^+$  und  $\sigma^-$  zusammenfassen. Ihr energetischer Abstand beträgt

$$\Delta E = 2\Delta E_{\text{Zeemann}} = 2\hbar\omega_L = \frac{\hbar e B}{m}. \tag{5.3}$$

Die Aufspaltung der Modellresonanz in diese beiden Resonanzübergänge hat zur Folge, dass die ursprüngliche Dispersionskurve in zwei entsprechend der Größe dieser Aufspaltung gegeneinander verschobene Dispersionskurven aufspaltet, welche die Ausbreitungseigenschaften von links- und rechtszirkular polarisiertem Licht in einem Stück Glas, das einem homogenen Magnetfeld ausgesetzt ist, beschreiben.

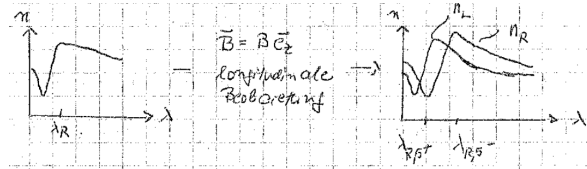


Abbildung 5.6: Zeemann-Aufspaltung der Modellresonanz in zwei Oszillatoren im axialen Magnetfeld. Auch fernab von den Resonanzen  $\lambda_{R,\sigma^+}$  und  $\lambda_{R,\sigma^-}$  und damit im sichtbaren und für Glas transparenten Spektralbereich unterscheiden sich die Brechungsindizes  $n_L$  und  $n_R$  für links- und rechtszirkular polarisiertes Licht, das sich im Glas im axialen Magnetfeld ausbreiten kann.

### 5.3 Bestimmung des Drehwinkels

Die in z-Richtung einfallende, linear polarisierte Welle wird in ihre links- und rechtszirkular polarisierten Moden zerlegt. Man erhält:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos\left(\frac{k_R + k_L}{2}z - \omega t\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k_R - k_L}{2}z\right) \\ \sin\left(\frac{k_R - k_L}{2}z\right) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Darin sind  $k_{L,R}$  die Wellenzahlen der links- und rechtszirkular polarisierten Wellen.

Bei  $z = 0$  tritt die Welle in den Glasstab ein:

$$\vec{E}(0, t) = E_0 \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Die einfallende Welle ist entlang der x-Achse linear polarisiert.

Bei  $z = l$  tritt die Welle aus dem Glasstab aus:

$$\vec{E}(l, t) = E_0 \cos\left(\frac{k_R + k_L}{2}l - \omega t\right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k_R - k_L}{2}l\right) \\ \sin\left(\frac{k_R - k_L}{2}l\right) \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Die Polarisationssebene der einfallenden Welle hat sich also für den Beobachter um den Winkel

$$\vartheta = \frac{k_R - k_L}{2}l \quad (5.7)$$

gedreht. Mit  $k_{L,R} = n_{L,R} \frac{2\pi}{\lambda}$  folgt:

$$\vartheta = \frac{\pi}{\lambda}(n_R - n_L)l. \quad (5.8)$$

Dabei ist  $\lambda$  die Vakuumwellenlänge der einfallenden Welle. Bei Kenntnis der Dispersionskurve  $n = n(\lambda)$  lässt sich ein kleiner Brechungsindexunterschied  $\Delta n = n_R - n_L$  linear wie folgt nähern:

$$\Delta n = \Delta\lambda \frac{dn}{d\lambda}. \quad (5.9)$$

Darin bezeichnet  $\Delta\lambda$  die Wellenlängendifferenz zwischen den  $\sigma^+$ - und  $\sigma^-$ -Resonanzübergängen. Aus deren bekanntem energetischen Abstand  $\Delta E = \frac{heB}{m}$  (vgl. Gl. (5.3)) und unter Verwendung der Beziehung  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$  lässt sich  $\Delta\lambda$  bestimmen:

$$\Delta\lambda = -\frac{heB}{2\pi mc} \cdot 2 \quad (5.10)$$

Damit erhält man für den Drehwinkel:

$$\vartheta = -\frac{e}{2mc} \lambda \frac{dn}{d\lambda} Bl. \quad (5.11)$$

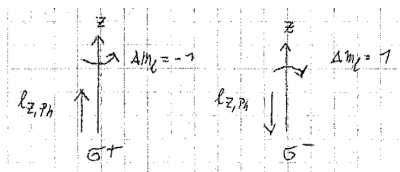
Der Vergleich mit dem empirischen Ausdruck  $\vartheta = VBl$  (vgl. Gl. (5.1)) liefert die Verdet-Konstante:

$$V = -\frac{e}{2mc} \lambda \frac{dn}{d\lambda}. \quad (5.12)$$

---

<sup>1</sup>Man beachte, dass bei diesem Versuch die Beobachtung in die Richtung des Magnetfeldes erfolgt. In dieser Richtung sind prinzipiell keine  $\pi$ -Emissionen zu erwarten (vgl. die Ausführungen zur klassischen Erklärung des normalen Zeemann-Effekts). Dies ist, wie hier gezeigt werden kann, eine unmittelbare Folge der Drehimpulserhaltung, die bei jedem erlaubten Übergang für das System Elektron-Photon gilt. Dabei ist zu beachten, dass die z-Komponente des Drehimpulses  $\vec{l}$  gemäß  $l_z = m_l \hbar$ ,  $m_l \in \mathbb{Z}$ ,  $-l \leq m_l \leq l$  gequantelt ist:

- $\Delta m_l = 0$  :  $\Delta l_{z,e^-} = 0 \Rightarrow l_{z,ph} = 0$  : Keine  $\pi$ -Emissionen in z-Richtung
- $\Delta m_l = \mp 1$  :  $\Delta l_{z,e^-} = \mp \hbar \Rightarrow l_{z,ph} = \pm \hbar$  :



<sup>2</sup>Da fernab der Resonanzen  $\Delta n = n_R - n_L > 0$  und  $\frac{dn}{d\lambda} < 0$  sind, muss wegen  $\Delta n = \Delta \lambda \frac{dn}{d\lambda}$  die Wellenlängendifferenz  $\Delta \lambda < 0$  sein.

<sup>3</sup>Der Drehwinkel  $\vartheta$  ist positiv in Übereinstimmung mit der getroffenen Vereinbarung, dass der Faraday-Effekt linksdrehend wirkt, wenn sich das Licht in Richtung des Magnetfeldes durch das Stück Glas fortpflanzt.